গতিবিদ্যা

কণার ঋজুরেখ ও সমতলীয় গতি

DYNAMICS

Rectilinear and plane motion of a particle

ডঃ প্রদীপ নিয়োগী এম্. এস্-সি. (কলিকাতা), ডি. এস্-সি. (আখেন)

রীডার, গণিত-বিভাগ
যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়, কলিকাতা

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ
(পশ্চিমবঙ্গ সরকারের একটি সংস্থা)

পিতৃদেব

৺সুরেন্দ্রপ্রসাদ নিয়োগীর

পুণ্যস্মৃতির উদ্দেশ্যে

লেখকের নিবেদন

বর্তমান পুস্তকটি গতিবিদ্যা-বিষয়ের একটি পাঠ্যপুস্তক। কণার ঋজুরেখ ও সমতলীয় গতি পুস্তকটিতে আলোচিত হয়েছে। পশ্চিমবঙ্গের বিশ্ববিদ্যালয়-গুলির স্নাতক (পাস/অনার্স বি. এস্-সি.) স্তরের গতিবিদ্যা-বিষয়ক পাঠ্যক্রম অনুযায়ী পুস্তকটি রচনা করা হয়েছে। বলবিদ্যার মূল নীতিগুলি পাঠক যাতে পরিষ্কার বুঝতে পারেন সেদিকে দৃষ্টি দেওয়া হয়েছে। সহজ উদাহরণের সাহায্যে আলোচিত নীতিগুলির ব্যাখ্যা করা হয়েছে ও প্রয়োগ দেখানো হয়েছে। অনুশীলনের জন্য প্রদত্ত প্রশ্নাবলী দুরূহতার ক্রম অনুযায়ী সাজানো হয়েছে। পুস্তকটি গতিবিদ্যা-বিষয়ের একটি প্রাথমিক পুস্তক। সেদিকে লক্ষ্য রেখে, জটিল সমস্যা সমন্বিত প্রশ্নাবলী অন্তর্ভুক্ত করা হয়নি। সাধারণ অভিজ্ঞতায় দেখা যায়, জটিল প্রশ্নাবলীর সমাধান বলবিদ্যার মূল নীতিগুলি হৃদয়ঙ্গম করার ব্যাপারে সক্রিয়ভাবে সাহায্য করে না। ছাত্রগণ প্রদত্ত প্রশ্নাবলী সমাধান করতে সচেষ্ট হলে পাঠ্য বিষয়ে সহজে অধিকার লাভ করবেন।

সর্বস্তরে শিক্ষার শ্রেষ্ঠ মাধ্যম মাতৃভাষা। বিশ্ববিদ্যালয় স্তরে বাংলা ভাষার মাধ্যমে পঠন-পাঠনের প্রধান অন্তরায় পাঠ্যপুস্তকের অভাব। পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ বিশ্ববিদ্যালয় স্তরে বাংলা ভাষায় পুস্তক প্রকাশের কাজে নেমে দীর্ঘকালের সেই অভাব দূরীকরণ করছেন। বর্তমান পুস্তকটি রচনা করতে তাঁরা লেখককে আহ্বান জানিয়েছেন ও পুস্তকটি প্রকাশ করেছেন। এজন্য তাঁদেরকে আমার আন্তরিক সাধুবাদ জানাই।

পুস্তকটি রচনার কাজে অনেকের কাছ থেকে উৎসাহ, অনুপ্রেরণা ও উপদেশ পেয়েছি। তাঁদের সবাইকে আমার আন্তরিক কৃতজ্ঞতা জানাই। বিশেষ্ ক'রে, যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতের অধ্যাপক ও বিজ্ঞান-শাখার ডীন ডক্টর রবীন্দ্রনাথ ভট্টাচার্য এবং বর্ধমান বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতের প্রধান অধ্যাপক ডক্টর শক্তিকান্ত চক্রবর্তী আমাকে পুস্তকটি রচনায় প্রবৃত্ত করেছেন। এঁদের সক্রিয় অনুপ্রেরণা না পেলে হয়তো পুস্তকটি রচনা করা হ'ত না। ছাত্র-অবস্থায়, অধ্যাপক ডক্টর নন্দলাল ঘোষ ও স্বর্গত অধ্যাপক ডক্টর নৃপেন্দ্রনাথ সেনের কাছে প্রথম বলবিদ্যা-বিষয়ে শিক্ষালাভ করেছি এবং বিষয়টি কতখানি আকর্ষণীয় ও গুরুত্বপূর্ণ তা অনুধাবন করেছি। এঁদের পড়ানোর প্রভাব

আমার রচনায় নানাভাবে প্রকাশ পেয়েছে। কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক ডক্টর মহাদেব দত্তর "বলবিদ্যার গোড়ার কথা" বিষয়ক বক্তৃতামালা শুনেও বিশেষ উপকৃত হয়েছি। যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতের রীডার, ডক্টর সুধীররঞ্জন খামরুই পুস্তকটির পাণ্ডুলিপি আদ্যোপান্ত বিশেষ যত্ন-সহকারে পাঠ করছেন এবং একাধিক ত্রুটি-বিচ্যুতি সংশোধন ক'রে ও গঠনমূলক সমালোচনা ক'রে পুস্তকটির উৎকর্ষ বৃদ্ধি করেছেন। কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ফলিত গণিত-বিভাগের প্রধান অধ্যাপক শ্রীপরিমলকান্তি ঘোষ পাণ্ডুলিপির কিছু কিছু অংশ পাঠ করেছেন। তাঁর মূল্যবান উপদেশ পুস্তকটির গুণগত মানের উন্নয়নে বিশেষ সাহায্য করেছে। পারিভাষিক শব্দাবলী ও বিস্তারিত বিষয়সূচী নির্বাচনে কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক ডক্টর মণীন্দ্র চাকী এবং অধ্যাপক ডক্টর অমল চৌধুরীর কাছ থেকে মূল্যবান মতামত পেয়েছি। পুস্তকটি রচনাকালে যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিত-বিভাগের সহকর্মীদের সঙ্গে আলোচনা ক'রে উপকৃত হয়েছি। এঁদের সকলের কাছে আমি কৃতজ্ঞ। সুন্দর ও সুষ্ঠু মুদ্রণের জন্য কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস প্রতিষ্ঠানটির প্রত্যেককে আমার আন্তরিক ধন্যবাদ জানাই।

আমাদের ছাত্রদের মধ্যে অনেকে ইংরাজী ভাষায় পটু নন। বর্তমান পুস্তকটি তাঁদের গতিবিদ্যা-বিষয়ে শিক্ষালাভের সহায়ক হলে শ্রম সার্থক জ্ঞান করব।

১ আশ্বিন, ১৩৮২ সাল

গণিত-বিভাগ, যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়

কলিকাতা-৩২

ইতি

প্রদীপ নিয়োগী

সূচীপত্র

ব্যবহৃত প্রতীকের তালিকা

জ্যামিতিক প্রতীক

x, y, z—সমকোণীয় কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

r, θ—সমতলীয় ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক ; r-অর, θ-নতি

s, ψ—সমতলীয় আন্তস্থানাঙ্ক ; s-বক্র বরাবর দূরত্ব, ψ-স্পর্শকের নতি

p, r—পাদ-স্থানাঙ্ক ; p-মূলবিন্দু থেকে স্পর্শকের লম্বদূরত্ব

ρ—বক্রতা-ব্যাসার্ধ

t—সময়

i, j, k—সমকোণীয় কার্তেসীয় অক্ষরেখা x, y, z-এর দিশায় একক ভেক্টর

$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}$—অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় একক ভেক্টর

T, N—স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় একক ভেক্টর

a—সরল সমঞ্জস দোলনের বিস্তার ; বৃত্তের ব্যাসার্ধ বা উপবৃত্তের পরাক্ষার্ধ

l—কণিকের অর্ধ-নাভিলম্ব ; সরল দোলকের দৈর্ঘ্য

e—কণিকের উৎকেন্দ্রতা

K—প্রথম জাতীয় উপবৃত্তীয় সমাকল

গতিবিজ্ঞানীয় প্রতীক

v—বেগ ভেক্টর ; ω—কৌণিক বেগ ভেক্টর

f—ত্বরণ ভেক্টর

F—বল ভেক্টর

m—ভর

p—রৈখিক ভরবেগ ভেক্টর

N—বলের টর্ক

L—কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর

h—কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক

G—মহাকর্ষীয় ধ্রুবক

g—মাধ্যাকর্ষণ ত্বরণ

T—সমঞ্জস গতিতে বা গ্রহের গতিতে পর্যায়কাল; টান
U—স্থৈতিক শক্তি
E—শক্তি
P—ক্ষমতা ; প্রতি একক ভরের জন্য ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় বল
W—কর্ম
I—বলের আবেগ
τ—স্খলন সময়
ω—মুক্তদোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক
p—প্রণোদিত দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক
R—বক্রের প্রতিক্রিয়া ভেক্টর
K—গতীয় শক্তি

একক ও মাত্রা

M—ভরের মাত্রা
L—দৈর্ঘ্যের মাত্রা
T—সময়ের মাত্রা
m—মিটার
cm—সেণ্টিমিটার
gm—গ্রাম
Kg—কিলোগ্রাম
s—সেকেণ্ড
dyn—ডাইন, বলের সি.জি.এস. একক
W—ওয়াট, ক্ষমতার এম.কে.এস. একক
J—জুল, কর্মের এম.কে.এস. একক
N—নিউটন, বলের এম.কে.এস. একক
ft, *lb*—ফুট, পাউণ্ড, ব্রিটিশ পদ্ধতি

ব্যবহৃত পরিভাষা সম্বন্ধে কয়েকটি কথা ঃ

বর্তমান পুস্তকটিতে ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দাবলীর তালিকা (বাংলা-ইংরাজী এবং ইংরাজী-বাংলা) পুস্তকের শেষে সংযুক্ত হয়েছে। ভাষার স্বচ্ছন্দতা যাতে ব্যাহত না হয়, সেজন্য পুস্তকের অভ্যন্তরে পারিভাষিক শব্দের ইংরাজী দেওয়া হয়নি। পারিভাষিক শব্দ প্রথম যেখানে ব্যবহার করা হয়েছে সেখানে তার সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। পাঠকগণ ইচ্ছা করলে বাংলা পারিভাষিক শব্দের ইংরাজী, পুস্তকের শেষে প্রদত্ত তালিকায় দেখতে পাবেন।

পারিভাষিক শব্দাবলী প্রধানতঃ "সংসদ বাঙলা অভিধান" থেকে গ্রহণ করা হয়েছে। কিছু কিছু শব্দ ডঃ দেবীপ্রসাদ রায় চৌধুরী প্রণীত ও পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ কর্তৃক প্রকাশিত "পদার্থের ধর্ম" পুস্তক থেকে নেওয়া হয়েছে। এতদ্ব্যতীত অল্প কিছু শব্দ লেখককে তৈরী ক'রে নিতে হয়েছে।

পুস্তকের অভ্যন্তরে বিদেশী বিজ্ঞানীদের নাম, উচ্চারণ অনুযায়ী বাংলা হরফে লেখা হয়েছে এবং ফুটনোটে রোমান হরফে (সাধারণতঃ জন্ম-মৃত্যুর সন সমেত) দেওয়া হয়েছে।

অপর কোন অধ্যায়ের সমীকরণ নির্দেশ করার জন্য একটি বন্ধনীর ভিতরে প্রথমে অধ্যায় সংখ্যা, তারপর একটি দশমিক বিন্দু ও সমীকরণ সংখ্যা ব্যবহার করা হয়েছে। যেমন (3·12) দ্বারা তৃতীয় অধ্যায়ের দ্বাদশ সমীকরণ বোঝায়। একই অধ্যায়ের সমীকরণ বোঝাতে বন্ধনীর ভিতরে শুধুমাত্র সমীকরণ সংখ্যা ব্যবহৃত হয়েছে।

ভেক্টর রাশিগুলি স্থূলভাবে ছাপা হয়েছে। কোন কোন ক্ষেত্রে, বিশেষ ক'রে চিত্রে, ভেক্টর বোঝাতে মাথায় তীর চিহ্ন অথবা রাশিটির নীচে একটি আনুভূমিক দাগ ব্যবহার করা হয়েছে। যেমন, x, y, z অক্ষরেখাগুলি বরাবর একক ভেক্টর $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ দ্বারা সূচিত হয়েছে।

প্রথম অধ্যায়

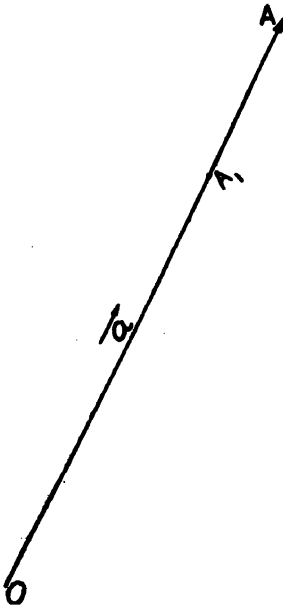
প্রারম্ভিক ধারণা ও গতির নিয়মাবলী

1·1. **ভূমিকা**—বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের যে রূপটি সর্বাগ্রে আমাদের চোখে পড়ে তা হ'ল এর গতি। পৃথিবী ও অন্যান্য গ্রহগণ অনবরত সূর্যকে প্রদক্ষিণ ক'রে চলেছে। চাঁদ প্রদক্ষিণ ক'রছে পৃথিবীকে। সূর্য বা অন্যান্য নক্ষত্ররাজিও গতিশীল। আবার দৈনন্দিন জীবনে মানুষকে বা যে কোন প্রাণীকে বেঁচে থাকার জন্য চলাফেরা করতে হয়। এমন কি, পদার্থের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ পরমাণুর গঠন সম্বন্ধে কোয়াণ্টাম তত্ত্ব থেকে জানা যায় যে, পরমাণু গঠনকারী ইলেকট্রনগুলি কেন্দ্রস্থ প্রোটনকে অনবরত প্রদক্ষিণ ক'রে চলেছে, যেভাবে সৌরমণ্ডলে গ্রহগুলি সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে, অনেকটা সেভাবে।

উপরের উদাহরণগুলি থেকে বোঝা যায় গতিবিষয়ক আলোচনা কত গুরুত্বপূর্ণ। বলবিদ্যা বিষয়ের যে অংশে গতিবিষয়ক আলোচনা করা হয়, তাকে **গতিবিদ্যা** বলে। বলের অধীন একটি কণার গতি আলোচনা করাই বর্তমান পুস্তকের উদ্দেশ্য। বলবিদ্যায় **কণা** শব্দের দ্বারা যে কোন অতিক্ষুদ্র পদার্থ বুঝায়, যার ভর আছে কিন্তু মাত্রা নেই। যদিও ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সকল বস্তুরই মাত্রা আছে, তথাপি আলোচনার সুবিধার্থে কণাকে মাত্রাহীন ধরা হয়। **অতিক্ষুদ্র** শব্দটি দ্বারা বস্তুটি কত ক্ষুদ্র তা সঠিকভাবে বোঝা যায় না। কোন বস্তু কত ক্ষুদ্র হলে তাকে কণা বলা হবে, তা নির্ভর করবে আলোচ্য প্রসঙ্গের উপর। একদিকে যেমন কোন পদার্থের অণু বা পরমাণুকে আমরা কণা ব'লে ভাবতে পারি, আবার তেমনি ক্ষেত্রবিশেষে সূর্য ও অন্যান্য নক্ষত্রের তুলনায় পৃথিবীর মতো বৃহদায়তন বস্তুকেও কণা ব'লে ভাবা যেতে পারে।

গতিবিদ্যা বিষয়কে প্রধানতঃ দুই অংশে ভাগ করা হয়। গতিবিদ্যার এক অংশে গতির কারণ সম্বন্ধে কোনরকম আলোচনা না ক'রে, গতি-সংক্রান্ত শুধুমাত্র জ্যামিতিক আলোচনা করা হয়। সেই অংশকে **স্থিতিবিদ্যা** বা কাইনেম্যাটিক্স বলা হয়। গতিবিদ্যার অপর অংশে গতির উপর বলের প্রভাব বিবেচিত হয়। এই অংশকে কাইনেটিক্স বা শুধুমাত্র **গতিবিদ্যা** বলে।

1·2. **ভেক্টর বিষয়ক আলোচনা**—ভৌতরাশিগুলিকে সাধারণতঃ দু'ভাগে ভাগ করা হয়—**ভেক্টর** ও **স্কেলার**। ভেক্টর

রাশির পরিমাণ ও দিশা উভয়ই থাকে। আর শুধু পরিমাণজ্ঞাপক ভৌত-রাশিকে স্কেলার বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, বেগ ও বল ভেক্টর রাশি। এদের সম্পূর্ণ পরিচয়ের জন্য পরিমাণ ও দিশা উভয়ই জানা প্রয়োজন। যেমন, যদি বলা হয় কোন ব্যক্তি পূর্বদিকে প্রতি ঘণ্টায় তিন মাইল পথ অতিক্রম করছে, তাহলে ব্যক্তিটির গতি সম্বন্ধে আমাদের মনে একটা স্পষ্ট ধারণা হয়। আমরা বলি, লোকটির বেগ পূর্বদিকে ঘণ্টায় তিন মাইল। কিন্তু যদি বলা হয়, লোকটি ঘণ্টায় তিন মাইল পথ অতিক্রম করছে, তাহলে মনে প্রশ্ন থেকে যায় লোকটি কোন দিকে যাচ্ছে? এক্ষেত্রে আমরা বলি, লোকটির দ্রুতি ঘণ্টায় তিন মাইল। স্কেলার রাশির একটি উদাহরণ দ্রুতি। ভর ও ঘনত্ব স্কেলার রাশির আরও উদাহরণ। স্কেলার রাশির সঙ্গে পার্থক্য করতে যাতে অসুবিধা না হয়, সেজন্য লেখার সময় ভেক্টর রাশির মাথায় সাধারণতঃ তীর চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন ভেক্টর a বুঝাতে $\vec{a}$ লেখা হয়। ছাপার সময় ভেক্টর মোটা হরফে ছাপা হয়।

চিত্র 1·1
ভেক্টর রূপায়ণ

ভেক্টরের সাহায্যে বলবিদ্যার আলোচনা সহজতর হয় এবং বর্তমান গ্রন্থে ধরা হবে যে পাঠক ভেক্টর বীজগণিতের সঙ্গে সম্যক্ পরিচিত। এই অনুচ্ছেদে ভবিষ্যৎ প্রয়োগের জন্য প্রয়োজনীয় ভেক্টর বিষয়ক আলোচনা করা হবে।

খণ্ড সরলরেখার সাহায্যে কোন ভেক্টর রাশির পরিমাণ ও দিশা খুব সহজে রূপায়িত করা যায়। ধরা যাক, কোন সরলরেখাখণ্ড $\overrightarrow{OA}$ (চিত্র 1·1) একটি ভেক্টর রাশি $\mathbf{a}$-কে রূপায়িত করে। OA-র মাথায় তীর চিহ্নটির দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে O বিন্দু থেকে A অভিমুখে টানা সরল-রেখার দিশাই $\mathbf{a}$ ভেক্টরের দিশা। এক্ষেত্রে OA রেখার দৈর্ঘ্য দ্বারা $\mathbf{a}$ ভেক্টরের পরিমাণ বুঝানো হয়েছে। এই অর্থে

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}. \quad (1a)$$

আবার $\overrightarrow{AO}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরের বিপরীত দিশাবিশিষ্ট কিন্তু সমপরিমাণ। এই অর্থে

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -\mathbf{a}. \tag{1b}$$

$\mathbf{a}$ ভেক্টরের পরিমাণ বুঝাতে $|\mathbf{a}|$ অথবা কেবল "a" প্রতীক-চিহ্ন ব্যবহার করা হবে। সুবিধামতো কোন দৈর্ঘ্যকে একক নিয়ে, ধরা যাক OA রেখা থেকে OA_1 পরিমাণ একক দৈর্ঘ্য কেটে নেওয়া হ'ল। তাহলে অঙ্কন অনুযায়ী $\overrightarrow{OA_1}$ ভেক্টরের পরিমাণ এক একক এবং দিশা $\mathbf{a}$ ভেক্টরের দিশা থেকে অভিন্ন। $\overrightarrow{OA_1}$ ভেক্টরকে $\mathbf{a}$ ভেক্টরের দিশাবিশিষ্ট **একক ভেক্টর** বলা হবে। একক ভেক্টর বুঝাতে প্রতীকের মাথায় ছাদ-চিহ্ন (^) ব্যবহার করা হবে। কাজেই

$$\overrightarrow{OA_1} = \hat{\mathbf{a}} \tag{2}$$

উপরন্তু, $\hat{\mathbf{a}}$ এবং $\mathbf{a}$ উভয়ের দিশা অভিন্ন, কিন্তু পরিমাণ আলাদা। যেহেতু $\mathbf{a}$-র পরিমাণ $|\mathbf{a}|$, সুতরাং

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\hat{\mathbf{a}}, \tag{3a}$$

অর্থাৎ

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \tag{3b}$$

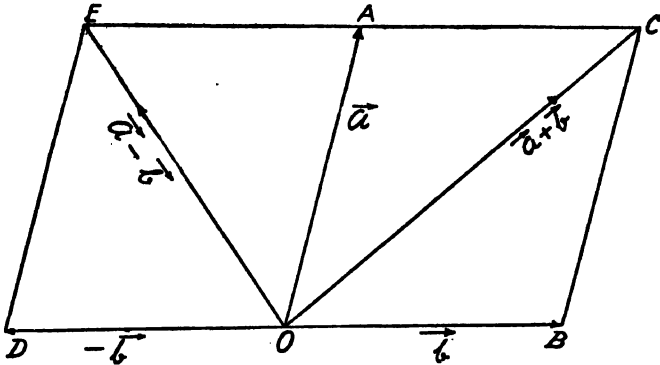
কাজেই দেখা যাচ্ছে, কোন ভেক্টরকে স্বীয় পরিমাণ দ্বারা ভাগ করলে সেই ভেক্টরের দিশাবিশিষ্ট একক ভেক্টর পাওয়া যায়। যদি $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ ভেক্টরের পরিমাণ পরস্পর সমান ও দিশা অভিন্ন হয় তবে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান হবে ; অর্থাৎ

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

দুইটি ভেক্টরের যোগফল সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী নির্ণীত হয়। ধরা যাক, কোন ভেক্টর $\mathbf{b}$-কে $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা এবং $\mathbf{a}$-কে $\overrightarrow{OA}$ দ্বারা রূপায়িত করা হ'ল (চিত্র 1·2)। OA এবং OB-কে সন্নিহিত বাহু

ধ'রে OACB সামান্তরিক অঙ্কন করা হ'ল। সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী **a** এবং **b** ভেক্টরের যোগফল সামান্তরিক ক্ষেত্রটির কর্ণ $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরের সমান হবে।

অর্থাৎ $$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \qquad (4a)$$

আবার BC বাহু OA বাহুর সমান ও সমান্তরাল ব'লে

চিত্র 1·2
ভেক্টর যোগের নিয়ম

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}.$$

সুতরাং $$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \overrightarrow{OC}. \qquad (4b)$$

এই নিয়মটিকে সাধারণতঃ **ভেক্টরের ত্রিভুজ নিয়ম** বলা হয়।

(4*a*) এবং (4*b*) থেকে দেখা যায়

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \qquad (4c)$$

অর্থাৎ ভেক্টরের যোগক্রিয়া **বিনিময় নিয়ম** মেনে চলে।

উপরন্তু **a**, **b**, **c** তিনটি ভেক্টর হলে,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \qquad (4d)$$

অর্থাৎ সসীম সংখ্যক ভেক্টরের যোগফল যোগক্রিয়ার ক্রমের উপর নির্ভরশীল নয়। সুতরাং, ভেক্টরগুলি যোগের **সংযোগ নিয়ম** মেনে চলে।

আবার বর্ধিত BO রেখা থেকে যদি OB দৈর্ঘ্যের সমান ক'রে OD অংশ কেটে নেওয়া হয়, তাহলে $\overrightarrow{OD}$ ও $\overrightarrow{OB}$ পরস্পর সমপরিমাণ, কিন্তু বিপরীত দিশাবিশিষ্ট ভেক্টর ব'লে

$$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} = -\mathbf{b}.$$

সামান্তরিক EDOA থেকে সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী আমরা পাই

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$$

অর্থাৎ $\overrightarrow{OE} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$

কোন ভেক্টর **a** থেকে সমান ভেক্টর **a** বিয়োগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায়, তাকে **শূন্য ভেক্টর** বলে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : এখানে বলা প্রয়োজন যে, পরিমাণ ও দিশাবিশিষ্ট সকল রাশিই কিন্তু ভেক্টর নয়। **পরিমাণ ও দিশাবিশিষ্ট যেসকল রাশি যোগের সামান্তরিক সূত্র মেনে চলে, শুধুমাত্র তাদেরই ভেক্টর বলে।** উদাহরণস্বরূপ, কোন দৃঢ় বস্তুর সসীম ঘূর্ণন ভেক্টর নয়, যদিও সসীম ঘূর্ণনের পরিমাণ ও দিশা উভয়ই আছে। (দৃঢ় বস্তুর অমিতক্ষুদ্র ঘূর্ণন কিন্তু একটি ভেক্টর রাশি,—দৃঢ়বস্তুর গতিবিদ্যা-বিষয়ক পুস্তকে তা প্রমাণ করা হয়।)

স্কেলার ও ভেক্টর গুণ—দুইটি ভেক্টরের মধ্যে **স্কেলার গুণ** অথবা **ভেক্টর গুণ,** এই দুই রকমের গুণপ্রক্রিয়া থাকতে পারে। **a** এবং **b** ভেক্টরের স্কেলার গুণ বুঝাতে (**a**, **b**) বা **a** . **b** এই দু'রকমের চিহ্ন চালু আছে এবং স্কেলার গুণ অনেক সময় "ডট গুণ" বলে অভিহিত হয়। সংজ্ঞানুযায়ী (চিত্র 1·2)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \mathrm{AOB} \tag{6}$$

অর্থাৎ দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল ভেক্টর-দুটির পরিমাণের ও সন্নিহিত কোণের কোসাইনের গুণফলের সমান। স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি। আবার উপরোক্ত সংজ্ঞানুযায়ী

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ba \cos \mathrm{BOA} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

সুতরাং, স্কেলার গুণ বিনিময়-নিয়ম মেনে চলে। উপরন্তু দেখানো যায় যে স্কেলার গুণ বিচ্ছেদ-নিয়ম মেনে চলে,—অর্থাৎ **a**, **b**, **c** তিনটি ভেক্টর হলে

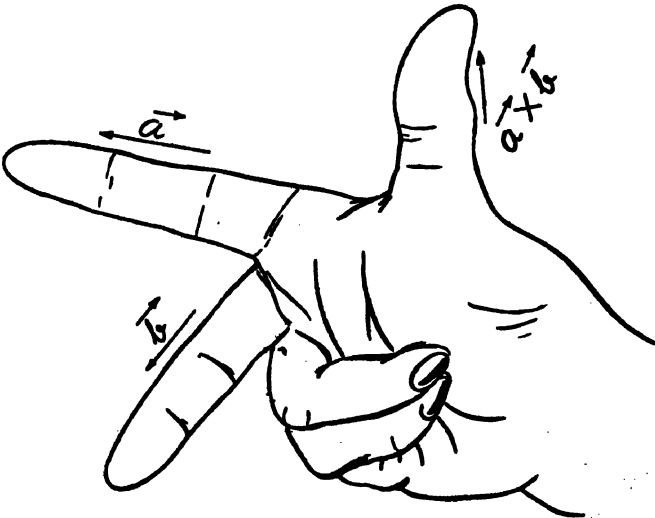
$$\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c} \tag{7}$$

ভেক্টর গুণ বুঝাতে $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ বা $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ এই দু'রকমের চিহ্ন চালু আছে এবং ভেক্টর গুণ অনেক সময় "ক্রস গুণ" ব'লে অভিহিত হয়।

সংজ্ঞানুযায়ী

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]\equiv\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{n}ab\sin \mathrm{AOB}. \tag{8}$$

এখানে $\hat{\mathbf{n}}$ ভেক্টর **a** এবং **b** ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব দিশাবিশিষ্ট একক ভেক্টর। কিন্তু AOB সমতলের উভয় পৃষ্ঠের একটি ক'রে লম্ব দিশা আছে। দক্ষিণ হস্তের প্রসারিত অঙ্গুলি, তর্জনী ও মধ্যমা বরাবর যদি যথাক্রমে **a** এবং **b** ভেক্টর থাকে, তবে সংজ্ঞানুযায়ী ভেক্টর গুণফলের দিশা $\hat{\mathbf{n}}$ প্রসারিত বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ বরাবর হবে (চিত্র 1·3)। লক্ষ্য করার বিষয়, যে ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি। আবার, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ ভেক্টরের পরিমাণ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ভেক্টরের পরিমাণের সমান, কিন্তু দিশা $\hat{\mathbf{n}}$-এর বিপরীত। কাজেই

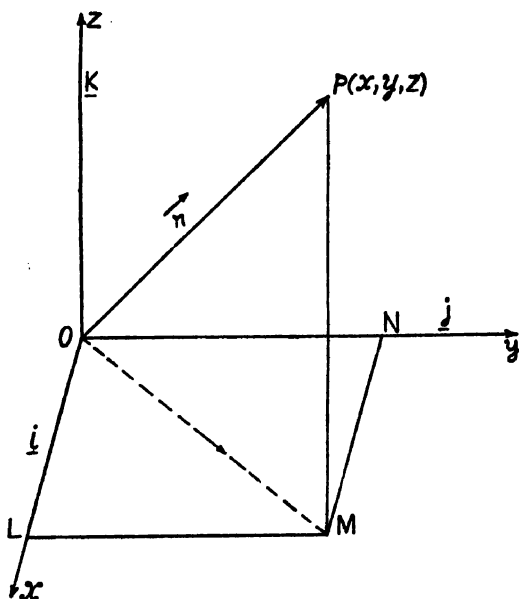
$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{9}$$

চিত্র 1·3

a ও **b**-র ভেক্টর গুণফলের দিশার ব্যাখ্যা

অর্থাৎ ভেক্টর গুণ (বা ক্রস গুণ) বিনিময়-নিয়ম মানে না। কিন্তু দেখানো যায় যে, ভেক্টর গুণ বিচ্ছেদ-নিয়ম মানে, অর্থাৎ

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} \tag{10}$$

কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ব্যবহার—ধরা যাক, পরস্পর সমকোণে অবস্থিত তিনটি সরলরেখা Ox, Oy, Oz একটি দক্ষিণহস্তীয় কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্র গঠন করে (চিত্র 1·4)। x, y এবং z অক্ষরেখার দিশাবিশিষ্ট একক ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ এবং $\mathbf{k}$. যে কোন বিন্দু $P(x, y, z)$-কে বিন্দুটির **অবস্থিতি ভেক্টর** $\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}$ দ্বারা একমাত্র রূপে নির্দিষ্ট করা যায়। আবার অবস্থিত ভেক্টর $\mathbf{r}(x, y, z)$-কে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং একক ভেক্টরগুলির সাহায্যে প্রকাশ করা সম্ভব। এই উদ্দেশ্যে, P বিন্দু থেকে XOY সমতলের উপর PM লম্ব টানা হ'ল এবং M বিন্দু থেকে x এবং y অক্ষরেখার উপর যথাক্রমে ML ও MN লম্ব অঙ্কন করা হ'ল। অঙ্কন অনুযায়ী

$$OL=x,\ ON=y \text{ এবং } MP=z.$$

চিত্র 1·4

দক্ষিণহস্তীয় কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্র

সুতরাং

$$\overrightarrow{OL}=x\mathbf{i},\ ON=y\mathbf{j},\ MP=z\mathbf{k}. \tag{11}$$

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON})+\overrightarrow{MP}$$

কিন্তু $\overrightarrow{OL}=x\mathbf{i}$, এবং $\overrightarrow{ON}=y\mathbf{j}$.

সুতরাং, (x, y, z) বিন্দুর অবস্থিতি ভেক্টর

$$\overrightarrow{OP}\equiv \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}. \tag{12}$$

আবার $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ পরস্পর লম্ব দিশাবিশিষ্ট ব'লে এদের স্কেলার গুণ

$$\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i}=\mathbf{j}\,.\,\mathbf{j}=\mathbf{k}\,.\,\mathbf{k}=1, \tag{13a}$$

এবং

$$\mathbf{i}\,.\,\mathbf{j}=\mathbf{j}\,.\,\mathbf{k}=\mathbf{k}\,.\,\mathbf{i}=0. \tag{13b}$$

পুনশ্চ, ভেক্টর গুণের ক্ষেত্রে

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0 \text{ (শূন্য ভেক্টর)}, \tag{14a}$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}. \tag{14b}$$

উদাহরণস্বরূপ, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ এবং $P_2\ (x_2, y_2, z_2)$ যে কোন দুটি বিন্দু হলে, বিন্দুদ্বয়ের অবস্থিতি ভেক্টর যথাক্রমে

$$\mathbf{r}_1\equiv\overrightarrow{OP}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$$

এবং

$$\mathbf{r}_2\equiv\overrightarrow{OP}_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}. \tag{15}$$

এদের স্কেলার গুণফল, (13*a*) এবং (13*b*) ব্যবহার করলে পাওয়া যায়

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1\,.\,\mathbf{r}_2&=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})\,.\,(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\end{aligned} \tag{16}$$

আর ভেক্টর গুণফল, (14*a*) এবং (14*b*) ব্যবহার করলে পাওয়া যায়

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2&=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})\times(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})\\&=(y_1z_2-y_2z_1)\,\mathbf{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\,\mathbf{j}\\&\quad+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{17a}$$

$(17a)$-র ডানদিকের রাশিটিকে ডিটারমিনাণ্ট রূপে লেখা যায়। আমরা পাই,

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (17b)$$

মনে রাখার পক্ষে $(17b)$ রূপটি খুব সুবিধাজনক।

উদাহরণ 1. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, ভেক্টর-দ্বয়ের লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ভেক্টরটি $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব, অতএব, $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ উভয় ভেক্টরের লম্ব একক ভেক্টর হ'ল

$$\pm \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

$\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ ভেক্টর-দ্বয় দ্বারা নির্ণীত সমতলের দু'দিকে দুটি লম্ব দিশা আছে ব'লে এখানে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় চিহ্নই হতে পারে। এখন,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 21\mathbf{j} - 42\mathbf{k}$$

এবং

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(14)^2 + (21)^2 + (-42)^2} = 49.$$

সুতরাং, নির্ণেয় লম্ব একক ভেক্টর-দ্বয় হ'ল যথাক্রমে

$$\tfrac{2}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} - \tfrac{6}{7}\mathbf{k} \text{ এবং } -\tfrac{2}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}.$$

উদাহরণ 2. যদি n সংখ্যক ভেক্টর $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_n$ এমন হয় যে

$$\lambda_1 \vec{P}_1 + \lambda_2 \vec{P}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{P}_n = 0,$$

যেখানে $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, স্কেলার রাশি যাদের মধ্যে অন্ততঃ একটি শূন্য নয়, তবে ভেক্টরগুলিকে **রৈখিকভাবে নির্ভরশীল** বলা হয়। ভেক্টরগুলির মধ্যে

যদি এরূপ কোন সম্বন্ধ নির্ধারণ করা না যায়, তবে তাদের রৈখিকভাবে স্বাধীন বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, যদি তিনটি ভেক্টর $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ এবং $\vec{P}_3$ একই সমতলে অবস্থিত হয়, তবে তাদের মধ্যে নিম্নরূপ সম্বন্ধ থাকবে

$$\lambda_1\vec{P}_1+\lambda_2\vec{P}_2+\lambda_3\vec{P}_3=0,$$

যেখানে λ_1, λ_2, λ_3 তিনটি স্কেলার রাশি, যাদের অন্ততঃ একটি শূন্য নয়। কাজেই, একই সমতলে অবস্থিত তিনটি ভেক্টর রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

যদি $\lambda_1 \neq 0$ হয়, তবে এক্ষেত্রে সম্বন্ধটিকে লেখা যায়

$$\vec{P}_1+\lambda\vec{P}_2+\mu\vec{P}_3=0,$$

যেখানে $\lambda=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, এবং $\mu=\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$.

উদাহরণস্বরূপ, $\vec{P}_1=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ এবং $\vec{P}_2=4\mathbf{i}+6\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ হলে,

$$\vec{P}_1+\lambda\vec{P}_2=(2+4\lambda)\mathbf{i}+(3+6\lambda)\mathbf{j}+(4+8\lambda)\mathbf{k}.$$

এখানে $\lambda=-\frac{1}{2}$-এর জন্য, ডানদিকের মান শূন্য, অর্থাৎ

$$\vec{P}_1-\tfrac{1}{2}\,\vec{P}_2=0$$

কাজেই, $\vec{P}_1$ এবং $\vec{P}_2$ ভেক্টর-দ্বয় রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

প্রশ্নমালা 1(ক)

(বর্তমান প্রশ্নমালায় **i**, **j**, **k** ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় অক্ষরেখার দিশায় একক ভেক্টর)

1. $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ দ্বারা কি বুঝায় ?

2. PQ-এর মধ্যবিন্দু G এবং P′Q′-এর মধ্যবিন্দু G′ হলে, দেখাও যে

$$\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{QQ'}=2\overrightarrow{GG'}.$$

3. ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রের জন্য দেখাও যে

(i) $2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

এবং

(ii) $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

4. ABC ত্রিভুজে BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে L, M এবং N. যদি $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$ হয় তবে $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$ এবং $\overrightarrow{CN}$ ভেক্টর-ত্রয়ের মান **a** এবং **b**-এর রূপে নির্ণয় কর।

5. ABC ত্রিভুজে শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থিতি ভেক্টর যথাক্রমে **a**, **b** এবং **c** হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের অবস্থিতি ভেক্টর নির্ণয় কর।

6. P এবং Q বিন্দুর অবস্থিতি ভেক্টর যথাক্রমে $2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+12\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ হলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর নির্ণয় কর।

7. যদি $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, এবং $\mathbf{b}=-4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ হয়, তবে $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ এবং $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ নির্ণয় কর ; দেখাও যে ভেক্টর-দ্বয় পরস্পর লম্ব।

8. $\vec{P}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ এবং $\vec{Q}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ হলে, $2\vec{P}-3\vec{Q}$ ভেক্টরটির পরিমাণ ও দিশা নির্ণয় কর।

9. যদি $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, এবং ফলটির ত্রিকোণমিতিক ব্যাখ্যা দাও।

10. $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ হলে $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ এবং $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ ভেক্টরের মান নির্ণয় কর।

11. $\vec{P}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ এবং $\vec{Q}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ভেক্টর-দ্বয়ের লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

12. $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ এবং $\vec{S}$ ভেক্টর-চতুষ্টয় একই সমতলে অবস্থিত হলে দেখাও যে

$$(\vec{P}\times\vec{Q})\times(\vec{R}\times\vec{S})=0.$$

13. যদি $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ ভেক্টর-দ্বয় পরস্পর লম্ব।

14. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ এবং $\mathbf{c}$ হলে দেখাও যে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের পরিমাণ

$$\tfrac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$

15. $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ভেক্টর-দ্বয়ের লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

16. প্রমাণ কর যে $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

17. যদি $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ এবং $\mathbf{c}$ ভেক্টর-তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হয়, তবে দেখাও যে সাধারণতঃ দুটি স্কেলার রাশি α এবং β নির্ধারণ করা যায়, যাদের জন্য $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$.

18. A এবং B বিন্দু-দ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-7, 2, 3)$ এবং $(-8, 4, 5)$ হলে, দেখাও যে

$$\overrightarrow{AB}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k},$$

এবং $\overrightarrow{AB}$ দিশায় একক ভেক্টর হ'ল,

$$-\tfrac{1}{3}\mathbf{i}+\tfrac{2}{3}\mathbf{j}+\tfrac{2}{3}\mathbf{k}.$$

19. যদি $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\mathbf{c}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

20. তিনটি ভেক্টর $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ এবং $\mathbf{c}$-এর জন্য প্রমাণ কর যে,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

21. দেখাও যে, তিনটি বিন্দু যাদের অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ দ্বারা নির্দিষ্ট, একই সরলরেখায় অবস্থিত হওয়ার আবশ্যিক ও যথেষ্ট সর্ত হ'ল

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=0,$$

যেখানে

$$\lambda+\mu+\nu=0.$$

উত্তরমালা 1(ক)

3. $AL = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $BM = \frac{\mathbf{b}}{2} - \mathbf{a}$, $CN = \frac{\mathbf{a}}{2} - \mathbf{b}$.

4. $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

5. $-\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$.

7. $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

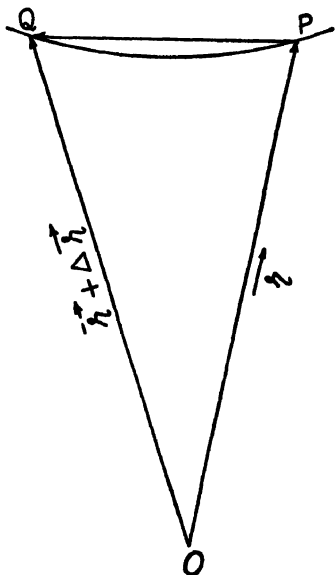
8. $\sqrt{353}$, দিশা কোসাইন $0, \; -\frac{17}{\sqrt{353}}, \; -\frac{1}{\sqrt{353}}$.

10. $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

11. $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$.

15. $\frac{\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}}{\sqrt{35}}$, $\frac{\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}}{-\sqrt{35}}$.

1·3. বেগ ও ত্বরণ। কৌণিক বেগ ভেক্টর—

ইতিপূর্বে বলা হয়েছে, অবস্থিতি ভেক্টরের দ্বারা কোন বিন্দুর অবস্থান সম্পূর্ণরূপে জানা যায়। গতিশীল কোন কণার অবস্থিতি ভেক্টর সময়ের সঙ্গে সঙ্গে পরিবর্তিত হতে থাকে। কোন নির্দিষ্ট সময় t-তে, যদি কোন কণার অবস্থিতি P বিন্দু দ্বারা সূচিত হয় (চিত্র 1·5), তবে ঐ সময়ে মূলবিন্দু O সাপেক্ষে কণাটির অবস্থিতি ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$. সুবিধা অনুযায়ী $\overrightarrow{OP}$-কে $\mathbf{r}$ দ্বারা নির্দেশ করা হবে। গতির ফলে কণাটি P বিন্দু থেকে সরে যাবে। ধরা যাক, অতিক্ষুদ্র সময় পরে, অর্থাৎ $t + \Delta t$ সময়ে কণাটির অবস্থিতি Q. তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর Δt সময়ে কণাটির **সরণ**। লক্ষ্য করার বিষয়, যে সরণ একটি ভেক্টর রাশি। যদি Q বিন্দুর অবস্থিতি $\overrightarrow{OQ}$-কে $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তবে Δt সময়ান্তরে কণাটির

চিত্র 1·5—সরণ ভেক্টর

সরণ হ'ল $\triangle \mathbf{r}$. **সময়ের সঙ্গে সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে।** বেগ একটি ভেক্টর রাশি। বেগ ভেক্টর সময় t-এর ফাংশন। $\mathbf{v}(t)$ দ্বারা t সময়ে কণাটির বেগ ভেক্টর নির্দেশ করা হবে। তাহলে, সংজ্ঞানুসারে কণাটির বেগ

$$\mathbf{v}\,(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle \mathbf{r}}{\triangle t}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{18}$$

যদি উপরোক্ত সীমান্ত মানের অস্তিত্ব থাকে। অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{r}$-এর দিশায় একক ভেক্টর $\hat{\mathbf{r}}$ দ্বারা সূচিত হলে

$$\mathbf{r}=|\mathbf{r}|\,\hat{\mathbf{r}} \tag{19}$$

সুতরাং (18), (19) এবং গুণফলের অবকলনের নিয়ম থেকে পাওয়া যায়

$$\mathbf{v}\,(t)=\frac{d}{dt}\left\{|\mathbf{r}|\hat{\mathbf{r}}\right\}=\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}\hat{\mathbf{r}}+|\mathbf{r}|\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}, \tag{20}$$

অর্থাৎ বেগ ভেক্টর দুটি ভেক্টরের সমষ্টি—এর মধ্যে একটি হ'ল অবস্থিতি ভেক্টরের পরিমাণের পরিবর্তন-জনিত এবং অপরটি দিশার পরিবর্তন-জনিত।

সময়ের সঙ্গে বেগ ভেক্টরের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে। ত্বরণ একটি ভেক্টর রাশি। ত্বরণ ভেক্টর সময় t-এর ফাংশন। ত্বরণ বুঝাতে $\mathbf{f}(t)$ প্রতীক-চিহ্ন ব্যবহার করা হবে। সংজ্ঞানুসারে

$$\mathbf{f}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{21}$$

কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে বেগ ও ত্বরণ—বর্তমান পুস্তকে সরলরেখায় ও সমতলে গতি আলোচিত হবে। তাই এখানে দ্বিমাত্রিক অক্ষতন্ত্র নেওয়া হ'ল। অক্ষরেখাগুলি স্থির ধরা হ'ল। দ্বিমাত্রিক কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্রে কণাটির অবস্থিতি যদি (x, y) হয়, তবে কণাটির অবস্থিতি ভেক্টর

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}.$$

এই মান (18) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d}{dt}\left\{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}\right\}. \tag{22}$$

অক্ষরেখাগুলি স্থির ধরলে, একক ভেক্টর $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ সময়ের উপর নির্ভর করে না। সুতরাং, (22) থেকে অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\mathbf{v}(t)=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j} \tag{23}$$

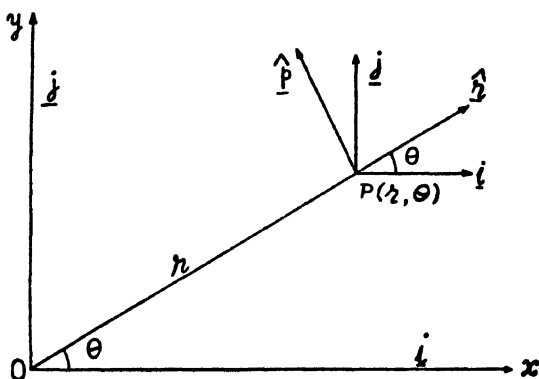
আবার (21) এবং (23) থেকে ত্বরণের মান হ'ল

$$\mathbf{f}(t)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}\right\}.$$

অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\mathbf{f}(t)=\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}. \tag{24}$$

(23) ও (24) সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, x-অক্ষরেখা বরাবর বেগ ও ত্বরণের উপাংশগুলি যথাক্রমে $\frac{dx}{dt}$ ও $\frac{d^2x}{dt^2}$ এবং y-অক্ষরেখা বরাবর উপাংশগুলি যথাক্রমে $\frac{dy}{dt}$ ও $\frac{d^2y}{dt^2}$. গতিবিদ্যা আলোচনাকালে সময় সাপেক্ষে অবকলনকে সংক্ষেপে মাথায় ডট-চিহ্নের সাহায্যে চিহ্নিত করার রীতি আছে।* এই রীতি অনুসারে

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt},\ \dot{y}=\frac{dy}{dt}. \tag{25a}$$

চিত্র 1·6—অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় বেগ ও ত্বরণ

* এই রীতির প্রবর্তন করেন স্বয়ং নিউটন। তিনি সময় সাপেক্ষে অবকলনের নাম দিয়েছিলেন 'ফ্লাক্সন' (Fluxion)।

আবার

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = \ddot{x} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \tag{25b}$$

মেরুস্থানাঙ্কে বেগ ও ত্বরণ—ধরা যাক, মেরুস্থানাঙ্কে কণাটির অবস্থিতি P(r, θ) (চিত্র 1.6)। মেরুস্থানাঙ্কে অর r-কে সর্বদাই ধনাত্মক নেওয়া হয় ব'লে, কণাটির অবস্থিতি ভেক্টর

$$\mathbf{r} = \mathrm{r}\,\hat{\mathbf{r}}, \tag{26}$$

যেখানে $\overrightarrow{OP}$-এর দিশাবিশিষ্ট একক ভেক্টর হ'ল $\hat{\mathbf{r}}$. কোণ বৃদ্ধির দিকে অনুপ্রস্থ দিশায়,—অর্থাৎ অর-এর লম্ব দিশায়, একক ভেক্টর $\hat{\mathbf{p}}$, এবং x ও y-অক্ষরেখার দিশায় একক ভেক্টর $\mathbf{i}$ এবং $\mathbf{j}$ হলে, স্পষ্টতঃ

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \tag{27}$$

এবং

$$\hat{\mathbf{p}} = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}.$$

সুতরাং অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} = \hat{\mathbf{p}}, \tag{28a}$$

এবং

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}}{d\theta} = -\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j} = -\hat{\mathbf{r}}. \tag{28b}$$

(26) সমীকরণের অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়,

$$\mathbf{v}(t) = \mathrm{r}\,\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{d\mathrm{r}}{dt}\hat{\mathbf{r}}. \tag{29}$$

কিন্তু (28a)-এর সাহায্যে দেখা যায়,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{p}. \tag{30}$$

কাজেই, (29) ও (30) থেকে আমরা পাই,

$$\mathbf{v}(t)=\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}+r\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{p}}. \tag{31}$$

উপরোক্ত সমীকরণের অবকলন দ্বারা ত্বরণের মান পাওয়া যায়।

$$\mathbf{f}(t)\equiv\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}}+\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{p}}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\mathbf{p}}+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt}$$

(30) এবং (28b)-এর সাহায্যে পাওয়া যায়,

$$\mathbf{f}(t)=\frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{p}}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\mathbf{p}}+r\frac{d\theta}{dt}\left(-\hat{\mathbf{r}}\frac{d\theta}{dt}\right).$$

সরল ক'রে পাই,

$$\mathbf{f}=\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left\{r^2\frac{d\theta}{dt}\right\}\hat{\mathbf{p}}. \tag{32}$$

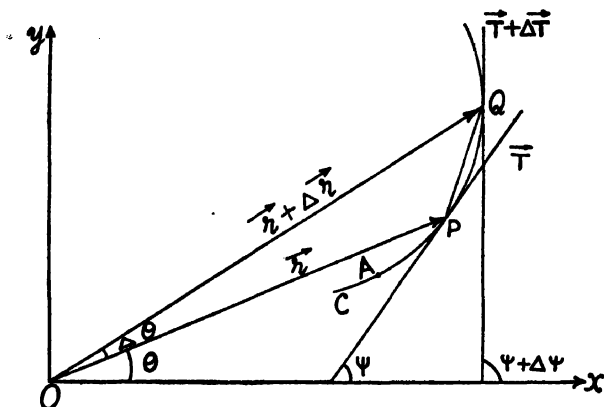
(31) ও (32) থেকে দেখা যায়, অর-এর দিশায় বেগ ও ত্বরণের উপাংশগুলি যথাক্রমে $\dot{r}$ এবং $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)$. (33$a$)

অনুপ্রস্থ দিশায় বেগ ও ত্বরণের উপাংশগুলি যথাক্রমে

$$r\dot{\theta} \text{ এবং } \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}). \tag{33b}$$

সময়ের সঙ্গে নতি θ কোণের পরিবর্তনের হারকে **কৌণিক বেগ** বলা হয়। তাহলে $\dot{\theta}\equiv\frac{d\theta}{dt}$ কণাটির কৌণিক বেগ সূচিত করে।

স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণ—সমতলে কোন কণা P-এর গতিপথ বক্র C-এর স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণের মান জানা অনেকসময় প্রয়োজন হয়। এজন্যে C-এর উপর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে কণা P-এর দূরত্ব চাপ AP বরাবর পরিমাপ করা হয়। চাপ AP বরাবর A থেকে P-এর দূরত্ব s হলে, s-এর সাহায্যে বেগ ও ত্বরণকে প্রকাশ করা যায় (চিত্র 1·7)। পূর্বের ন্যায়, মূলবিন্দু O সাপেক্ষে P-এর অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{r}$ এবং বক্র C-এর উপর অমিতক্ষুদ্র সময় Δt পরে কণাটির অবস্থিতি ভেক্টর $\overrightarrow{OQ}\equiv\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ ধরা হ'ল। ধরা যাক, চাপ AP$=s$ এবং চাপ

$AQ = s + \Delta s$. তাহলে $\Delta \mathbf{r}$ ভেক্টর দ্বারা জ্যা-ভেক্টর $\overrightarrow{PQ}$ সূচিত হয়। এক্ষেত্রে,

চিত্র 1·7—স্পর্শক অভিলম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণ

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \left\{ \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right\} \cdot \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right\}$$

$$= \left\{ \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\text{জ্যা } \overrightarrow{PQ}}{\text{চাপ } PQ} \right\} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

কিন্তু Q বিন্দু বক্র C বরাবর P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হলে, {জ্যা $\overrightarrow{PQ}$/চাপ PQ} ভেক্টরটি, যার দিশা হ'ল PQ-এর দিশা, P বিন্দুতে স্পর্শকের দিশার দিকে অগ্রসর হয় এবং $\Delta s \to 0$ সীমান্তে স্পর্শকের দিশায় পরিণত হয়। P বিন্দুতে স্পর্শকের দিশায় s বৃদ্ধি অভিমুখে একক ভেক্টর **T** হলে

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} = v\mathbf{T}, \qquad (34)$$

কারণ আমরা জানি,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\text{জ্যা } PQ}{\text{বৃত্তচাপ } PQ} = 1.$$

(34) থেকে দেখা যায়, বেগের পরিমাণ $v=\frac{ds}{dt}$. পুনরায়, ত্বরণের মান হ'ল,

$$\mathbf{f}(t)\equiv\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+\frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt}. \tag{35}$$

এখানে, $\frac{d\mathbf{T}}{dt}$-এর মান নির্ণয় করার জন্য, প্রথমে লক্ষ্য করি যে,

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{36}$$

উপরন্তু, $\mathbf{T}$ একটি একক ভেক্টর ব'লে

$$\mathbf{T}.\,\mathbf{T}=\mathrm{T}^2=1.$$

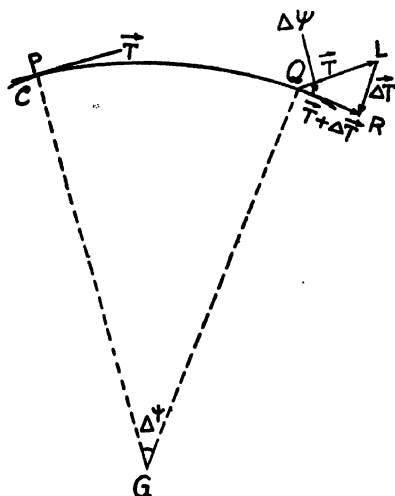
s সাপেক্ষে উভয়পক্ষের অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\mathbf{T}.\,\frac{d\mathbf{T}}{ds}+\frac{d\mathbf{T}}{ds}.\,\mathbf{T}=0.$$

অতএব. $\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds}=0.$

কাজেই, $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ ভেক্টরটি $\mathbf{T}$ ভেক্টরের লম্ব দিশাবিশিষ্ট হবে,

অর্থাৎ $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ ভেক্টরটি C বক্রের উপর P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব-দিশায় হবে। $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$-এর পরিমাণ নির্ণয় করার জন্য লক্ষ্য করা দরকার যে P বিন্দুতে C বক্রের স্পর্শক দিশা $\mathbf{T}$ যদি x-অক্ষরেখার সঙ্গে ψ কোণ করে এবং নিকটবর্তী Q বিন্দুতে স্পর্শক দিশা QR যদি $\psi+\Delta\psi$ কোণ করে, তবে $\mathbf{T}$ এবং $\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}$ একক ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণের মান $\Delta\psi$, (চিত্র 1·8)। বক্র C-এর বক্রতাকেন্দ্র G হলে GP ও GQ রেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ হবে $\Delta\psi$. চিত্র 1·8-এ Q বিন্দুতে স্পর্শকের দিশায় একক ভেক্টর হ'ল QR এবং Q বিন্দুতে $\mathbf{T}$-এর দিশায়

অঙ্কিত একক ভেক্টর হ'ল QL. তাহলে, কোণ $\angle LQR = \Delta\psi$

চিত্র $1{\cdot}8 - \left|\frac{d\mathbf{T}}{d\psi}\right|$ নির্ণয়

এবং $\overrightarrow{LR} = \Delta\mathbf{T}$. কিন্তু $\Delta\psi$ কোণটি অমিতক্ষুদ্র এবং QL $=$ QR $=1$ ব'লে, Q-কে কেন্দ্র ক'রে একক ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তচাপ LR, জ্যা LR-এর প্রায় সমান হবে। এখন $d\mathbf{T}$ ভেক্টরের পরিমাণ হ'ল $d\psi$, কারণ

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\psi} \quad \lim_{\Delta\psi\to 0}\frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta\psi}$$

$$-\left|\lim_{\Delta\psi\to 0}\frac{\text{জ্যা LR}}{\text{বৃত্তচাপ LR}}\right| = 1$$

কিন্তু অঙ্কন অনুযায়ী $d\psi$ ধনাত্মক। কাজেই,

$$|d\mathbf{T}| = d\psi.$$

সুতরাং P বিন্দুতে অভিলম্ব দিশায়, বক্রতা-কেন্দ্র অভিমুখে একক ভেক্টরকে **N** দ্বারা সূচিত করলে, দেখা যায়

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\psi}{ds}\mathbf{N}. \tag{37}$$

তাহলে, (35), (36) এবং (37) থেকে ত্বরণের মান আসে

$$\mathbf{f}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\psi}{ds}\mathbf{N}. \tag{38}$$

কিন্তু বক্রটির বক্রতা হ'ল $\frac{d\psi}{ds}$. P বিন্দুতে বক্রটির বক্রতা-ব্যাসার্ধ ρ দ্বারা নির্দেশ করলে

$$\rho = \frac{ds}{d\psi},$$

এবং ত্বরণের মান দাঁড়ায়

$$\mathbf{f}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N} \tag{39}$$

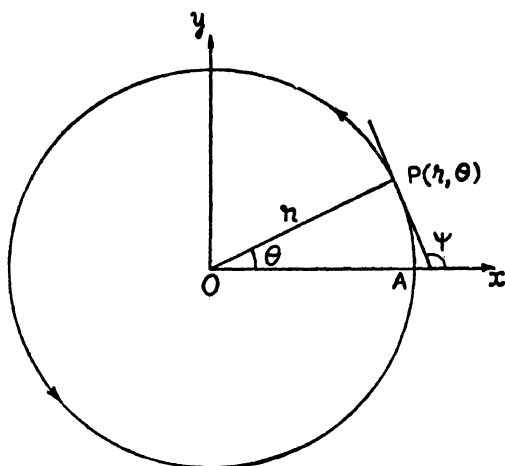
সুতরাং স্পর্শকের দিশায় বেগ ও ত্বরণের উপাংশগুলি যথাক্রমে

$$\frac{ds}{dt} \text{ ও } \frac{d^2s}{dt^2} \tag{40a}$$

এবং অভিলম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণের উপাংশগুলি যথাক্রমে

$$0 \text{ ও } v^2 \tag{40b}$$

উদাহরণ 3. ধরা যাক একটি কণা a ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তপথে সুষম গতিতে গমন করছে (চিত্র 1·9)। বৃত্তটির কেন্দ্র O-কে মূলবিন্দু ধ'রে, কোন সময় t-তে কণাটির অবস্থিতি মেরুস্থানাঙ্কে (r, θ) হলে, $r=a$ $=$ ধ্রুবক। কাজেই কণাটির বেগ

$$\mathbf{v}(t)=\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}}+r\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{p}}=a\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{p}} \tag{41a}$$

চিত্র 1·9—বৃত্তপথে সুষমগতি

অর্থাৎ কণাটির বেগ সম্পূর্ণরূপে অনুপ্রস্থ দিশায় বা স্পর্শকের দিশায়। সুতরাং কণাটির বেগের পরিমাণ বা দ্রুতির মান হ'ল

$$v=a\dot{\theta}. \tag{41b}$$

$\dot{\theta} \equiv \dfrac{d\theta}{dt}$ দ্বারা কণাটির কৌণিক বেগ বুঝায়। কৌণিক বেগ ω (ওমেগা) চিহ্ন দ্বারা নির্দেশ করলে $\dot{\theta} \equiv \omega$ এবং

$$v=a\omega. \tag{41b}$$

যেহেতু কণাটি সুষম গতিতে গমন করছে, সুতরাং $\omega=$ ধ্রুবক। কাজেই, কণাটির ত্বরণ **f**-এর মান

$$\mathbf{f}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\,\hat{\mathbf{p}}=\left(0-a\frac{v^2}{a^2}\right)\hat{\mathbf{r}}+a\frac{d\omega}{dt}\,\hat{\mathbf{p}}$$

$$=-\frac{v^2}{a}\,\hat{\mathbf{r}}. \tag{41c}$$

সুতরাং কণাটির ত্বরণের পরিমাণ $\dfrac{v^2}{a}$ এবং দিশা $\hat{\mathbf{r}}$ ভেক্টরের বিপরীত দিশায়,—অর্থাৎ কেন্দ্রাভিমুখী। কাজেই **সুষম গতিতে বৃত্তপথে গমন করলে কণাটির ত্বরণ সর্বদাই কেন্দ্রাভিমুখী হবে** এবং **ঐ ত্বরণের পরিমাণ (v^2/a).** এই ত্বরণকে **অভিকেন্দ্র ত্বরণ** বলে।

আবার বৃত্তটির উপর কোন স্থির বিন্দু A থেকে P বিন্দুর দূরত্ব s হলে

$$s=a\theta. \tag{42a}$$

কাজেই স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণের জন্য

$$\mathbf{v}=a\dot{\theta}\mathbf{T}=a\omega\mathbf{T}, \tag{42b}$$

$$\mathbf{f}=a\frac{d\omega}{dt}\mathbf{T}+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}.$$

কিন্তু $\psi=\theta+\dfrac{\pi}{2}$ ব'লে,

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}=\frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\psi}=a.1=a.$$

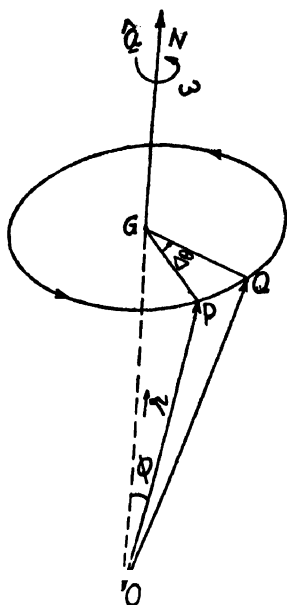
কাজেই

$$\mathbf{f}=0+\frac{v^2}{a}\mathbf{N}=a\omega^2\mathbf{N} \tag{42c}$$

এখানে P বিন্দুতে অঙ্কিত বক্রতা-কেন্দ্রের অভিমুখে অভিলম্ব দিশায় একক ভেক্টর হ'ল **N**, অর্থাৎ ত্বরণ কেন্দ্রাভিমুখী। কাজেই প্রত্যাশা অনুযায়ী, দু'ভাবে আমরা একই ফল পেলাম।

কৌণিক বেগ ভেক্টর—কৌণিক বেগের সংজ্ঞা উপরে প্রদত্ত হয়েছে। কৌণিক বেগের সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট দিশার সংযোগ স্থাপন করা যায়,—যার সাহায্যে কৌণিক বেগকে একটি ভেক্টর রাশিরূপে ভাবা হয়। ধরা যাক, কোন কণা P, ON অক্ষের লম্ব সমতলে অক্ষটির চারপাশে পরিক্রমণ করছে (চিত্র 1·10)। অক্ষটির উপর O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P বিন্দু থেকে ON রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব হ'ল PG. অমিতক্ষুদ্র সময় Δt পরে কণাটির অবস্থিতি Q ধরা হ'ল। অমিতক্ষুদ্র বৃত্তচাপ PQ যদি G বিন্দুতে $\Delta\theta$ কোণ করে, তবে কণাটির কৌণিক বেগ হ'ল

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt},$$

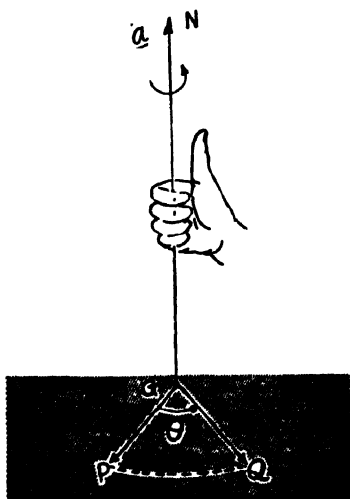
যেখানে ω প্রতীক দ্বারা কৌণিক বেগ বুঝানো হয়েছে।

চিত্র 1·10
কৌণিক বেগ ভেক্টর

OGN দিশাকে কৌণিক বেগ ω-এর দিশারূপে গ্রহণ করা হয়। ক্ষুদ্রতম যে কোণ অতিক্রম করলে GP রেখাখণ্ড GQ-এর সঙ্গে মিশে যায়, সেই অভিমুখে ডান হাতের আঙুলগুলি মুঠ করলে, প্রসারিত বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ কৌণিক বেগ ভেক্টর ω-এর দিশা নির্দিষ্ট করবে (চিত্র 1·11)।

চিত্র 1·11
কৌণিক বেগ ভেক্টরের দিশার ব্যাখ্যা

এই দিশায় একক ভেক্টর $\hat{a}$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হলে, কৌণিক বেগ ভেক্টর ω-এর মান হ'ল,

$$\omega = \omega\hat{a} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{a}. \qquad (43)$$

স্থির বিন্দু O সাপেক্ষে P-এর অবস্থিতি

ভেক্টর r হলে, এবং $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{ON}$-এর অন্তর্বর্তী কোণের মান ϕ হলে, GOP ত্রিভুজ থেকে দেখা যায়

$$GP = OP \sin\phi = r \sin\phi.$$

কাজেই P বিন্দুর বেগের পরিমাণ হ'ল

$$\omega.GP = \omega.r \sin\phi,$$

এবং দিশা হ'ল ঐ সমতলে GP-এর লম্ব দিশায় PQ অভিমুখে, অর্থাৎ $(\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{r})$ ভেক্টরের দিশায়। সুতরাং, P বিন্দুর বেগ ভেক্টর $\mathbf{v}$ হ'ল

$$\mathbf{v} = (\omega r \sin\phi)\mathbf{T}$$

যেখানে $(\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{r})$ ভেক্টরের দিশায় একক ভেক্টর হ'ল $\mathbf{T}$. যেহেতু $\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{r}$ ভেক্টরের পরিমাণ $r \sin\phi$, কাজেই $\mathbf{T} = \dfrac{\hat{a} \times \mathbf{r}}{r \sin\phi}$. সুতরাং,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \mathbf{v} = \omega\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{44a}$$

এখান থেকে অনুমান করা যায়, ঘূর্ণমান কণার জন্য সময় সাপেক্ষে কোন ভেক্টরকে অবকলন করার সময় অবকলন-সংকারককে আমরা নিম্নরূপে লিখতে পারি :

$$\frac{d}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times . \tag{44b}$$

গণিতের অনেক শাখায় অবকলনের সংকারক রূপ ব্যবহার করার রীতি প্রচলিত আছে এবং (44b)-কে একটি সংকারক সমীকরণ বলে ভাবা যায়। সংকারক সমীকরণের সাহায্যে গাণিতিক রাশির সরল কার্য সহজ হয়। তৃতীয় অধ্যায়ে, 3·9 অনুচ্ছেদে ঘূর্ণমান নির্দেশ কাঠামোতে বেগ ও ত্বরণ নির্ণয়ের জন্য (44b) সমীকরণের ব্যবহার বিশেষ সুবিধাজনক হবে। প্রকৃতপক্ষে, কোন একটি ভেক্টর যদি একটি অক্ষের চারপাশে ঘুরতে থাকে, তবে সময় সাপেক্ষে সেই ভেক্টরের পরিবর্তনের হার নির্ণয়ের জন্য (44b) খাটে।

ধরা যাক, কোন একটি ভেক্টর **A**, ON অক্ষের চারপাশে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে (চিত্র 1·10)। O-কে স্থির বিন্দু ধ'রে, **A** ভেক্টরকে $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা রূপায়িত করা হ'ল, অর্থাৎ

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{A}.$$

তাহলে,

$$GP = OP \sin\phi = A \sin\phi.$$

ধরা যাক, অমিতক্ষুদ্র সময় Δt অন্তরে **A**-এর মান হ'ল $\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}$, যাকে চিত্রে $\overrightarrow{OQ}$ দ্বারা নির্দেশ করা হ'ল।

তাহলে,

$$\Delta\mathbf{A} = \overrightarrow{PQ} = GP.\Delta\theta.\mathbf{T}' = A \sin\phi.\Delta\theta.\mathbf{T}',$$

যেখানে $\mathbf{T}'$ হ'ল $\overrightarrow{PQ}$-এর দিশায় একক ভেক্টর। $\Delta t \to 0$ সীমায়, $\overrightarrow{PQ}$ দিশা P বিন্দুতে স্পর্শকের দিশায় পরিণত হয় লক্ষ্য ক'রে, আমরা দেখি

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} A \sin\phi.\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.\mathbf{T}'$$
$$= \omega A \sin\phi\, \mathbf{T}'$$

অর্থাৎ,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \omega \times \mathbf{A}. \qquad (44c)$$

সুতরাং ω কৌণিক বেগে ঘূর্ণমান যে কোন ভেক্টর **A**-র জন্য আমরা সংকারক সমীকরণ পাই

$$\frac{d}{dt} = \omega \times .$$

3·9 অনুচ্ছেদে এই সমীকরণের ব্যবহার দেখা যাবে।

উদাহরণ 4. অবকলন-গুণাঙ্কগুলির অস্তিত্ব ধরে নিয়ে, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ এবং $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ ভেক্টর-দ্বয়ের জন্য প্রমাণ করতে হবে যে

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v}$$

এখানে $\mathbf{u}$ এবং $\mathbf{v}$ ভেক্টর-দ্বয় সময় t-এর ফাংশন। ধরা যাক,

$$\mathbf{w}(t)=\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t),$$

এবং অমিতক্ষুদ্র সময় Δt পরে

$$\mathbf{u}(t+\Delta t)=\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u},\ \mathbf{v}(t+\Delta t)=\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v},\ \mathbf{w}(t+\Delta t)=\mathbf{w}+\Delta\mathbf{w}$$

তাহলে,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{w}&=\mathbf{w}(t+\Delta t)-\mathbf{w}(t)\\&=(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})\times(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})-\mathbf{u}\times\mathbf{v}\\&=\mathbf{u}\times\Delta\mathbf{v}+\Delta\mathbf{u}\times\mathbf{v}+(\Delta\mathbf{u})\times(\Delta\mathbf{v})\end{aligned}$$

সুতরাং

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{w}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\vec{\mathbf{u}}\times\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}+\frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t}\times\mathbf{v}\right\}+\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\left(\frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t}\right)\times\Delta\mathbf{v}\right\}$$

$$=\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v}+\frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\left\{\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\mathbf{v}\right\}$$

$$=\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v},$$

কারণ, অবকলন-গুণাঙ্কগুলির অস্তিত্ব আছে ধ'রে, ডানদিকের তৃতীয় পদটির মান শূন্য।

5. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার বেগ v-এর সঙ্গে অবস্থিতি x-এর সম্বন্ধ $v^2=k(a^2-x^2)$ হলে, কণাটির ত্বরণের পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে, যেখানে k এবং a ধ্রুবক এবং রেখাটির উপর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে t সময়ে কণাটির দূরত্ব x.

সংজ্ঞানুসারে, ত্বরণের মান $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$-এর সমান, যেখানে $\mathbf{v}$ কণাটির বেগ সূচিত করে। ত্বরণের পরিমাণ,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}.$$

কাজেই x সাপেক্ষে প্রদত্ত সম্বন্ধ অবকলন ক'রে আসে

$$2v\frac{dv}{dx}=-2kx.$$

সুতরাং ত্বরণের পরিমাণ

$$v\frac{dv}{dx} = -kx.$$

প্রশ্নমালা 1 (খ)

1. ভেক্টর $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ এবং স্কেলার $\lambda = \lambda(t)$-এর জন্য অবকলনের নিম্নলিখিত নিয়মগুলি প্রমাণ কর (গুণাঙ্কগুলির অস্তিত্ব ধ'রে নিয়ে)—

(i) $$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}.\,\mathbf{v}\right) = \mathbf{u}.\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}.\mathbf{v},$$

এবং

(ii) $$\frac{d}{dt}\,(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{u}.$$

2. দেখাও যে $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathbf{r}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$

3. $\mathbf{r}$-এর দিশায় একক ভেক্টরকে $\hat{\mathbf{r}}$ দ্বারা সূচিত করলে দেখাও যে

$$\hat{\mathbf{r}}\times d\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{r}}{r^2}.$$

4. যদি $\mathbf{R} = \mathbf{A}\cos\omega t + \mathbf{B}\sin\omega t$ হয়, যেখানে $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ এবং ω ধ্রুবক, তবে দেখাও যে

$$\mathbf{R}\times\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \omega\,\mathbf{A}\times\mathbf{B},$$

এবং

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{R} = 0.$$

5. যদি $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = \omega\times\mathbf{A}$ এবং $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} = \omega\times\mathbf{B}$ হয় তবে দেখাও যে,

$$\frac{}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \omega\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).$$

6. বেগ এবং ত্বরণ ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{v}$ এবং $\mathbf{f}$ হলে দেখাও যে স্পর্শক এবং অভিলম্ব দিশায় ত্বরণের উপাংশ যথাক্রমে

$$f_T=\frac{\mathbf{f}.\mathbf{v}}{v} \text{ এবং } f_N=\frac{|\mathbf{f}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$

7. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার t-সময়ে অবস্থিতি x. যদি

$$t=\alpha x^2+\beta x+\gamma,$$

হয়, যেখানে α, β, γ প্রদত্ত ধ্রুবক, দেখাও যে কণাটির বেগ

$$v=\frac{1}{2\alpha x+\beta},$$

এবং কণাটির ত্বরণ, রেখাটির উপর একটি স্থির বিন্দু থেকে কণাটির দূরত্বের তৃতীয় ঘাতের ব্যস্ত সমানুপাতিক।

8. সুষম দ্রুতিতে বৃত্তপথে গমনরত একটি কণা

$$r=a\cos\theta,$$

বৃত্তটি রচনা করলে, দেখাও যে কণাটির ত্বরণের পরিমাণ ধ্রুবক এবং দিশা কেন্দ্রাভিমুখী।

9. গমনরত একটি কণা সুষমকোণী সর্পিল $r=a\,e^{\theta\cot\alpha}$ রচনা করছে। কণাটিকে সংযোগকারী অর-এর কৌণিক বেগ সুষম হলে, দেখাও যে কণাটির ত্বরণ অর-এর সঙ্গে 2α কোণ করে এবং ত্বরণের পরিমাণ v^2/r, যেখানে কণাটির দ্রুতি v.

10. পৃথিবী সূর্যের চারপাশে $1{\cdot}49\times10^{13}$cm. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তপথে গমন করছে ধ'রে, ভূকেন্দ্রের বেগ নির্ণয় কর এবং আলোকের বেগের সঙ্গে এই বেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

11. পৃথিবী নিজ অক্ষের চারপাশে দিনে একবার ঘুরে আসে। ভূকেন্দ্র-সাপেক্ষে, ভূপৃষ্ঠে বিষুবরেখায় অবস্থিত কোন একটি কণার বেগ নির্ণয় কর। (পৃথিবীর গড় ব্যাসার্ধ $6{\cdot}37\times10^8$cm ধর।)

12. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার ত্বরণ f সুষম হলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $v=u+ft$,

(ii) $x = ut + \frac{1}{2}ft^2$,

এবং

(iii) $v^2 = u^2 + 2fx$,

যেখানে আদি সময় $t=0$-তে কণাটির বেগ $v=u$, এবং অবস্থিতি $x=0$.

13. সরলরেখায় গমনরত একটি কণা কোন নির্দিষ্ট দূরত্বের প্রথম এবং দ্বিতীয়ার্ধ যথাক্রমে সুষম ত্বরণ f_1 এবং f_2 দ্বারা অতিক্রম করলে, দেখাও যে যাত্রাশেষে কণাটি যে বেগ লাভ করবে তা সম্পূর্ণ দূরত্ব $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ সুষম ত্বরণ দ্বারা অতিক্রমে লব্ধ বেগের সমান।

14. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার অবস্থিতি x-এর সঙ্গে সময়ের সম্বন্ধ

$$e^t = ax^2 + bx,$$

হলে, অবস্থিতির রূপে বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর, যেখানে a এবং b ধ্রুবক।

15. যদি সময় t অবস্থিতি x-এর ফাংশন রূপে প্রদত্ত হয় তবে দেখাও যে ত্বরণের পরিমাণ হ'ল

$$v^3 \frac{d^2t}{dx^2}$$

যেখানে v দ্রুতি সূচিত করে।

16. যদি সময় t অবস্থিতি x-এর দ্বিঘাত ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে ত্বরণ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্বের তৃতীয় ঘাতের ব্যস্ত সমানুপাতিক।

17. দেখাও যে, কোন কণার এমন কোন গতি থাকতে পারে না, যেখানে বেগ স্থির অবস্থা থেকে কণাটির দূরত্বের সমানুপাতিক।

কণাটির গতি কি এমন হতে পারে যেখানে বেগ, স্থির অবস্থা থেকে দূরত্বের বর্গমূলের সমানুপাতিক ?

উত্তরমালা 1 (খ)

10. 3×10^6 cm/sec, 10^{-4}.

11. $4{\cdot}7 \times 10^4$ cm/sec.

14. $v = \dfrac{ax^2+bx}{2ax+b}$, $f = \dfrac{(ax^2+bx)(2a^2x^2+2abx+b^2)}{(2ax+b)^3}$.

1·4. গতির নিয়মাবলী। ভর, ভরবেগ ও বল

পূর্বের অনুচ্ছেদগুলিতে গতিবিষয়ক জ্যামিতিক আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান অনুচ্ছেদে গতির কারক বল এবং গতির নিয়মাবলী আলোচিত হবে। সুষ্ঠু ও সামগ্রিকভাবে গতির কারণ এবং গতির নিয়মাবলী ইংরেজ গাণিতিক স্যর আইজাক নিউটন[1] "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (London 1687) নামক বিখ্যাত পুস্তকে ল্যাটিন ভাষায় সর্বপ্রথম প্রকাশ করেন এবং নিউটনীয় বলবিদ্যার গোড়াপত্তন করেন। বিগত তিন শতাব্দী ধরে গাণিতিক পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন ক্ষেত্রে নিউটনীয় বলবিদ্যার প্রয়োগ করা হয়েছে এবং দেখা গেছে বেশির ভাগ প্রাকৃতিক ঘটনার বিশ্লেষণে নিউটনীয় বলবিদ্যা সঠিক ফল প্রদান করে। নিউটনের পূর্বে একাধিক বিজ্ঞানী বলবিদ্যা বিষয়ে গবেষণা করেন, যাদের মধ্যে আর্কিমিডিস[2], গ্যালিলাই[3], হুইগেনস[4], কেপলার[5] প্রভৃতির নাম বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। নিউটন প্রদত্ত গতির তিনটি নিয়মের মধ্যে প্রথম এবং দ্বিতীয়টির মূল অংশ যথাক্রমে ইতালীয় পদার্থবিদ গ্যালিলাই এবং ডাচ পদার্থবিদ হুইগেনস নিউটনের পূর্বে প্রকাশ করেন। তৃতীয় নিয়মটি নিউটনের সম্পূর্ণ স্বকীয়। নিউটনের "প্রিন্সিপিয়া মাতেমাটিকা" প্রকাশের একশো বছর পরে ফরাসী গাণিতিক লাগ্রঁজ[6] তাঁর বিখ্যাত পুস্তক "Mecanique Analytique"-এ বলবিদ্যাকে গণিতের অংশরূপে সুপ্রতিষ্ঠিত করেন এবং "যুক্তিসিদ্ধ বলবিদ্যা"র গোড়াপত্তন করেন।

নিউটন প্রদত্ত গতির নিয়মাবলীকে মানুষের দীর্ঘকালের গভীর ও বিস্তীর্ণ অভিজ্ঞতালব্ধ জ্ঞানের সারাংশ রূপে দেখা হয়ে থাকে এবং গতিবিদ্যার স্বতঃসিদ্ধরূপে গ্রহণ করা হয়। নিউটন প্রদত্ত গতির নিয়মগুলি নিম্নরূপ ঃ

গতির প্রথম নিয়ম—স্থির অবস্থারত যেকোন বস্তু স্থির অবস্থাতেই থাকে, অথবা সুষমবেগে সরলরেখায় গমনরত কোন

[1] Sir Isaac Newton (1642—1727),
[2] Archimedes (287—212 B.C.),
[3] Galileo Galilei (1564—1642),
[4] Huygens (1629—1695),
[5] Kepler (1571—1630),
[6] Lagrange (1736—1813).

বস্তু সুষমবেগে সরলরেখায় গমনরতই থাকে, যতক্ষণ না কোন বহিঃস্থ বল সেই অবস্থার পরিবর্তন ঘটায়।

বর্তমান পুস্তকে শুধুমাত্র কণার গতি আলোচনা করা হবে ব'লে উপরের নিয়মটিতে "বস্তু" শব্দের দ্বারা কণা বুঝাবে। প্রথমেই লক্ষ্য করার বিষয়, যে কোন বস্তুর স্থিরাবস্থা এবং সুষমবেগে সরলরেখায় গমনাবস্থা,—এই দুটি অবস্থাকে উপরের নিয়মদ্বারা সমপর্যায়ে এনে ফেলা হয়েছে এবং বস্তুর স্বাভাবিক অবস্থারূপে বিবেচিত হয়েছে। প্রথম নিয়ম দ্বারা বস্তুর স্বাভাবিক অবস্থায় টিকে থাকার ক্ষমতাকে স্বীকার্যরূপে গ্রহণ করা হয়েছে। এই "টিকে থাকার ক্ষমতা"কে আমরা বস্তুর **জড়তা** বলে অভিহিত করি। তাই কোন কোন পুস্তকে এই নিয়মটিকে **গ্যালিলাই-এর জড়তা নিয়ম** বলে অভিহিত হয়েছে।

নিয়মটিকে গাণিতিক সূত্রের রূপ দেবার উদ্দেশ্যে নিউটন নিম্নলিখিত **ভর** ও **ভরবেগের** সংজ্ঞার সাহায্য গ্রহণ করেন :

সংজ্ঞা—কোন বস্তুতে যে পরিমাণ জড় উপস্থিত, তাকে বস্তুটির **ভর** বলে। কোন বস্তুর ভর ও বেগের গুণফলকে ভরবেগ বলে।

উপরোক্ত নিউটন প্রদত্ত ভরের সংজ্ঞা কিন্তু সন্তোষজনক নয়, — কারণ জড় শব্দের কোন স্বাধীন সংজ্ঞা দেওয়া যায় না। প্রকৃতপক্ষে, **নিউটনীয় গতিবিজ্ঞায় "ভর" এবং "বল" দুটি অসংজ্ঞাত মৌলিক পদ সূচিত করে।** এদের মাধ্যমে অন্য সকল নতুন পদের সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব। তবে ভর এবং বল সম্বন্ধে আমাদের সকলেরই অল্পবিস্তর সজ্ঞাত জ্ঞান আছে, যার ফলে দুটি ভর বা দুটি বল পরস্পর তুলনা করা যায়। আরও লক্ষ্য করার বিষয়, যে গতির প্রথম নিয়মকেই বলের গুণজ্ঞাপক সংজ্ঞা হিসেবে ভাবা যায় এবং বলা যায়, **কোন বস্তুর স্থির অবস্থা বা সুষমবেগে সরলরেখায় গমনাবস্থার পরিবর্তন যে ঘটায় বা ঘটাতে চেষ্টা করে, তাকেই বল বলে।** বল পরিমাপ করার উপায় নিম্নে প্রদত্ত গতির দ্বিতীয় নিয়ম থেকে পাওয়া যায়।

কোন কণার ভর m, বেগ $\mathbf{v}$ এবং ভরবেগ $\mathbf{p}$ হলে, সংজ্ঞানুসারে

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{45}$$

ভরবেগ* একটি ভেক্টর রাশি। নিউটনের প্রথম নিয়মকে তাহলে লেখা যায়,

* এখানে "ভরবেগ" পদ দ্বারা রৈখিক ভরবেগ বুঝায়। কৌণিক ভরবেগের আলোচনা তৃতীয় অধ্যায়ে করা হয়েছে।

"যদি কোন বল ক্রিয়া না করে, তবে

$$\mathbf{p} = \text{ধ্রুবক}\text{ ।"} \tag{46}$$

বলবিদ্যায় বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ নিয়মগুলোকে কোন ভৌত রাশির সংরক্ষণের নিয়মরূপে সাধারণতঃ প্রকাশ করা হয়। এভাবে দেখতে গেলে, গতির প্রথম নিয়ম হ'ল **"ভরবেগ সংরক্ষণের নীতি"**।

উপরোক্ত গতির প্রথম নিয়মে "বহিঃস্থ বল" পদের দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে ক্রিয়াশীল বল বস্তুর আভ্যন্তরীণ কোন বল নয়, — বাইরের থেকে ক্রিয়া করছে এমন কোন বল। অর্থাৎ আভ্যন্তরীণ বল স্বাভাবিক অবস্থার পরিবর্তন ঘটাতে পারে না।

গতির দ্বিতীয় নিয়ম—ভরবেগ পরিবর্তনের হার ক্রিয়াশীল বলের সঙ্গে সমানুপাতিক এবং যে সরলরেখার দিশায় বল ক্রিয়া করে সেই দিশায় ভরবেগ পরিবর্তন সংঘটিত হয়।

ক্রিয়াশীল বলকে $\mathbf{F}$ দ্বারা সূচিত করলে, দ্বিতীয় নিয়মকে লেখা যায়,

$$\mathbf{p} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} = k\mathbf{F}; \tag{47}$$

যেখানে k সমানুপাত-জনিত অচর। $\mathbf{p}$ এবং $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ভেক্টর রাশি ব'লে, এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় বল $\mathbf{F}$ একটি ভেক্টর রাশি। বল ও ভরবেগ পরিবর্তনের একক যদি এমনভাবে নেওয়া হয় যে $|\mathbf{p}| = 1$ হলে $|\mathbf{F}| = 1$ হবে, তবে $k = 1$. অতএব গতির দ্বিতীয় নিয়ম দাঁড়ায়

$$\mathbf{p} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{48}$$

(48) থেকে দেখা যায়, যে দ্বিতীয় নিয়মটিকে **ভরবেগ পরিবর্তনের নীতি** রূপে ধরা যেতে পারে।

যদি ক্রিয়াশীল বল $\mathbf{F}$-এর মান শূন্য হয়, তবে (48) থেকে দেখা যায়

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \;;$$

সুতরাং

$$\mathbf{p} = \text{ধ্রুবক},$$

অর্থাৎ প্রথম নিয়মটি ফিরে পাওয়া গেল।

গতির সঙ্গে বস্তুটির ভরের পরিবর্তন যদি না ঘটে, তবে (45) সমীকরণের দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

সেক্ষেত্রে গতির দ্বিতীয় নিয়ম (48) দাঁড়ায়

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}, \tag{49a}$$

অর্থাৎ,

ভর × ত্বরণ = বল। (49b)

জ্যামিতিক উপায়ে, কোন অক্ষতন্ত্র সাপেক্ষে ত্বরণ পরিমাপ করা যায়। এখন, যদি কোন ভর m-এর উপর কোন বল $\mathbf{F}_1$ ক্রিয়া ক'রে $\mathbf{f}_1$ ত্বরণ সৃষ্টি করে এবং দ্বিতীয় কোন বল $\mathbf{F}_2$-এর জন্য $\mathbf{f}_2$ ত্বরণ উৎপন্ন হয়, তবে (49b) অনুযায়ী

$$m\mathbf{f}_1=\mathbf{F}_1,\ \text{এবং}\ m\mathbf{f}_2=\mathbf{F}_2.$$

একই দিশায় ক্রিয়া করে, এমন দুটি বল যদি নেওয়া হয় তবে

$$\mathrm{F}_1=\frac{f_1}{f_2}\,\mathrm{F}_2. \tag{50}$$

অর্থাৎ ত্বরণ পরিমাপ ক'রে বল-দুটিকে পরস্পর তুলনা করা চলে।

আবার একই বল $\mathbf{F}$ যদি দুটি ভিন্ন ভর m_1 এবং m_2-এর উপর ক্রিয়া ক'রে যথাক্রমে $\mathbf{f}_1$ এবং $\mathbf{f}_2$ ত্বরণ উৎপন্ন করে, তবে (49b) অনুযায়ী

$$m_1\mathbf{f}_1=\mathbf{F}=m_2\mathbf{f}_2. \tag{51}$$

সুতরাং f_1 এবং f_2 ত্বরণ পরিমাপ দ্বারা নির্ণয় করলে (51) সমীকরণের সাহায্যে ভর-দুটির পরস্পর তুলনা করা যায়।

বলা প্রয়োজন যে, কণার ভর কিন্তু সব সময় অপরিবর্তিত থাকে না, — যেমন, আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী গতির সঙ্গে ভরের পরিবর্তন ঘটতে পারে। দ্বিতীয় অধ্যায়ে, ভরের পরিবর্তন সমন্বিত অন্যান্য কয়েকটি উদাহরণ আলোচিত হবে।

গতির তৃতীয় নিয়ম—প্রত্যেক ক্রিয়ার বিপরীতমুখী সমপরিমাণ প্রতিক্রিয়া থাকে, অথবা দুটি বস্তুর পারস্পরিক ক্রিয়া সমপরিমাণ ও বিপরীতমুখী হয়।

তৃতীয় নিয়ম থেকে দেখা যায়, পরস্পর ক্রিয়াশীল দুটি বস্তুর মধ্যে দ্বিতীয় বস্তুর উপর প্রথম বস্তুজনিত ক্রিয়া $\mathbf{F}_{12}$ প্রথম বস্তুর উপর দ্বিতীয় বস্তুজনিত ক্রিয়া $\mathbf{F}_{21}$-এর সমপরিমাণ ও বিপরীতমুখী হবে,—অর্থাৎ

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{52}$$

এই নিয়মটি কণাসমষ্টি বা দৃঢ়বস্তুর গতিবিদ্যায় বা স্থিতিবিদ্যায় বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করে।

উপরে প্রদত্ত গতির তিনটি নিয়মের প্রয়োগকালে কয়েকটি বিষয়ে লক্ষ্য রাখা দরকার। প্রথমেই বলা প্রয়োজন যে, তৃতীয় নিয়মে ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়াকে একই সময়ে পরিমাপ করতে হবে। ক্রিয়া বা বলের সঞ্চার-বেগ সসীম হওয়ার ফলে, ক্ষেত্রবিশেষে তৃতীয় নিয়মটির প্রয়োগে কিঞ্চিৎ অসুবিধার সৃষ্টি হতে পারে,—কেননা বলের ক্রিয়া অনুভূত হতেও কিছুটা সময়ের প্রয়োজন। পরমাণু সংঘর্ষের সমস্যায় এই নিয়মের প্রয়োগে ভালো ফল নাও পাওয়া যেতে পারে, কারণ পরমাণুর বেগ অতি দ্রুত এবং আলোকের বেগের সঙ্গে তুলনীয়। এক জায়গা থেকে অন্যত্র বল সঞ্চারিত হওয়ার সঠিক প্রক্রিয়া না জেনেও ধরা যায় যে, এই সঞ্চার-বেগ বড়জোর আলোকের বেগের সমান (আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী কোন ইঙ্গিতের বেগ আলোকের বেগের অধিক হতে পারে না)। দুটি মোটরগাড়ীর সংঘর্ষে কিন্তু গতির তৃতীয় নিয়ম যথেষ্ট সঠিক ফল দেবে, কেননা গাড়ী-দুটির সংঘর্ষকালের তুলনায় ভাঙা গাড়ীটি অতিক্রম করতে আলোকরশ্মির যে সময় লাগে তা অতিক্ষুদ্র। মোটামুটি হিসাবে এই সময়ের মান

$$\frac{\text{ভাঙা গাড়ীর দৈর্ঘ্য}}{\text{আলোকের বেগ}} \simeq \frac{300 \text{ cm}}{3\times10^{10} \text{ cm/sec}} \simeq 10^{-8} \text{ sec.} \tag{53}$$

একটি গাড়ী যদি ঘণ্টায় 50 km. বেগে যায়, তবে এই সময়ে গাড়ীটি যে দূরত্ব অতিক্রম করবে, তার মান মাত্র

$$\frac{50\times10^{5}}{60\times60}\times10^{-8} \text{ cm} \simeq 1{\cdot}4\times10^{-5} \text{ cm.} \tag{53'}$$

আবার, গতির দ্বিতীয় এবং প্রথম নিয়মে ধরা হয়েছে যে অক্ষতন্ত্রের কোন ত্বরণ নেই। বস্তুর গতি কোন নির্দিষ্ট অক্ষতন্ত্র সাপেক্ষে পরিমাপ করা হয়। উপরোক্ত অক্ষতন্ত্র যদি ত্বরিত গতি-বিশিষ্ট হয়, তবে সেই অক্ষতন্ত্র-সাপেক্ষে দ্বিতীয় ও প্রথম নিয়ম খাটবে না। উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাক কোন বালক একটি নাগরদোলায় চড়ে ঘুরছে। এক্ষেত্রে, বহিঃস্থ কোন বল ক্রিয়া না

করলেও নাগরদোলার পাটাতন সাপেক্ষে বালকটির ত্বরণ কিন্তু শূন্য হবে না এবং নাগরদোলাটিকে শক্ত ক'রে ধ'রে থাকলেই কেবল বালকটি স্থির থাকতে পারে। দৈনন্দিন জীবনে, এরকম বহু উদাহরণ আমাদের চোখে পড়ে,—যেমন কোন যাত্রিবাহী বাস রাস্তায় মোড় ঘোরার সময় যাত্রীরা একটা বল অনুভব করেন। বাসটি যদি সুষমবেগে সরলরেখায় গমন করতে থাকে, তবে কিন্তু এরূপ কোন বল অনুভূত হবে না। এবিষয়ে আরও আলোচনা 1·8 অনুচ্ছেদে দ্রষ্টব্য।

1·5. সামান্তরিক সূত্র ও বলের ভৌত স্বতন্ত্রতা নীতি—গতির নিয়মের সঙ্গে নিউটন দুটি বলের যোগক্রিয়ার নিয়মও প্রদান করেন। নিয়মটি হ'ল **সামান্তরিক সূত্র** :

কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুটি বলের পরিমাণ ও দিশাকে যদি একটি সামান্তরিক ক্ষেত্রের ঐ বিন্দুগামী (কণার অবস্থিতি বিন্দুগামী) সন্নিহিত বাহুদ্বয় দ্বারা সম্পূর্ণরূপে (অর্থাৎ পরিমাণ, দিশা ও অভিমুখে) রূপায়িত করা যায়, তবে তাদের লব্ধি সামান্তরিকের ঐ বিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে রূপায়িত হবে।

এখানে **লব্ধি** পদটির একটু ব্যাখ্যা প্রয়োজন। কোন কণার উপর একাধিক বলের সম্মিলিত ক্রিয়া যদি কণাটির উপর অপর কোন একটি মাত্র বলের ক্রিয়ার সমান হয়, তবে শেষোক্ত বলটিকে পূর্বোক্ত বলগুলির **লব্ধি** বলে।

এই নিয়ম থেকে দেখা যাচ্ছে, দুটি ভেক্টরের যোগের যে নিয়ম পূর্বের অনুচ্ছেদে দেওয়া হয়েছে, দুটি বলের লব্ধি অর্থাৎ যোগফল নির্ণয়ের বেলা সেই একই নিয়ম প্রযুক্ত হবে। গতির দ্বিতীয় নিয়মের গাণিতিক রূপ (48) থেকে দেখা যায় যে, বল **F** একটি ভেক্টর রাশি*। কাজেই দুটি বলের যোগফল যে ভেক্টর যোগের নিয়ম থেকে পাওয়া যাবে, তা তো আলাদা ক'রে না বললেও বোঝা যায়। তাই, মনে প্রশ্ন জাগতে পারে, এই নিয়মটি আলাদা ক'রে বলার কি প্রয়োজন ছিল? এই প্রশ্নের উত্তর দিয়েছেন, বিগত শতাব্দীর খ্যাতনামা অস্ট্রীয় পদার্থবিদ্ ও দার্শনিক মাখ[1]। তিনি

* ভেক্টরের সংজ্ঞা অনুযায়ী পরিমাণ, দিশা ও অভিমুখ এক হলে দুটি ভেক্টর সমান হয়। পূর্বেই বলা হয়েছে, বল একটি ভেক্টর রাশি। কিন্তু বল সম্বন্ধে কিছু বলতে গেলেই সর্বাগ্রে জানা প্রয়োজন হয় বলটি কোথায় ক্রিয়া করছে, অর্থাৎ কোন্ নির্দিষ্ট বিন্দুর উপর বল ক্রিয়া করছে; ভেক্টর সম্বন্ধে কিন্তু এটা জানা আবশ্যিক নয়। এই অর্থে বল হ'ল একটি **স্থানস্থিত ভেক্টর**।

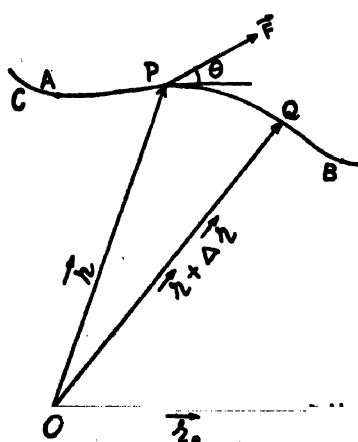
[1] Mach

দেখিয়েছেন, সামান্তরিক সূত্র থেকে বলের **ভৌত স্বতন্ত্রতা নীতি** প্রতিপন্ন হয়। ভৌত স্বতন্ত্রতা নীতি নিম্নরূপ :

কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল বস্তুটির ভরবেগের যে পরিবর্তন ঘটায়, তা বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল অন্যান্য বলের উপর নির্ভরশীল নয়।

এই নীতিটিকে গতিবিদ্যার স্বতঃসিদ্ধরূপে গ্রহণ করা হয়। ভৌত স্বতন্ত্রতা নীতি অনুযায়ী কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত একাধিক বল সম্মিলিত-ভাবে বস্তুটির ভরবেগের যে পরিবর্তন ঘটায় তা ঐ বলগুলির পৃথক্ পৃথক্ ক্রিয়ায় সৃষ্ট ভরবেগ পরিবর্তনের যোগফলের সমান। গণিতের অন্যান্য শাখায়ও অনুরূপ ধর্ম দেখতে পাওয়া যায়, যাদের **উপরিপাত নীতি** ব'লে অভিহিত করা হয়।

1·6. কর্ম, ক্ষমতা ও শক্তি। সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে ও শক্তি সংরক্ষণ নীতি—বল **F**-এর ক্রিয়ায় একটি কণা কোন সমতলীয় বক্রপথে গমন করছে। P অবস্থিতিতে কণাটির অবস্থিতি ভেক্টর **r** (চিত্র 1·12). Δt সময় পরে কণাটির অবস্থিতি, নিকটবর্তী বিন্দু Q ধরা হ'ল, যেখানে Q-এর অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। তাহলে,

$$PQ=\Delta\mathbf{r}.$$

চিত্র 1·12—কর্মের সংজ্ঞা

P বিন্দু থেকে Q বিন্দু পর্যন্ত সরণের জন্য **বল F দ্বারা সাধিত কর্ম** W-এর সংজ্ঞা হ'ল, **F** এবং $\Delta\mathbf{r}$ ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফল :

$$W=(\mathbf{F}.\ \Delta\mathbf{r})$$

$$=F\Delta r\ \cos\ (\mathbf{F},\ \Delta\mathbf{r}) \qquad (54)$$

যেখানে $\cos\ (\mathbf{F},\ \Delta\mathbf{r})$ প্রতীক দ্বারা বল **F** এবং সরণ $\Delta\mathbf{r}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণের কোসাইন সূচিত হয়েছে। আবার PQ চাপটি অমিতক্ষুদ্র ধ'রে কর্মকে একটু ভিন্নরূপে প্রকাশ করা যায়। কণাটির গতিপথ বক্র C-এর উপর কোন

নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে দূরত্ব s পরিমাপ ক'রে, চাপ PQ-কে $\Delta\mathbf{s}$ ভেক্টর দ্বারা রূপায়িত করা যায়, যার দিশা হ'ল অমিতক্ষুদ্র জ্যা PQ-এর দিশা (লক্ষণীয় যে Q→P সীমান্তে $\Delta\mathbf{S}$ ভেক্টরের দিশা P বিন্দুতে বক্রটির স্পর্শকের দিশায় পরিণত হয়)। এক্ষেত্রে কর্ম

$$W=(\mathbf{F}.\ \Delta\mathbf{S}) \tag{54}$$

লেখাও যায়।

সংজ্ঞা (54) থেকে দেখা যায়, **সরণের দিশায় বলের উপাংশ ও সরণের গুণফল হ'ল বলের দ্বারা সাধিত কর্ম**। কর্ম সম্বন্ধে কিছু বললে সর্বদা বলা প্রয়োজন, কার দ্বারা কর্মটি সাধিত হ'ল। লক্ষ্য করার বিষয় যে, কর্ম একটি স্কেলার রাশি।

ক্রিয়াশীল বল কিন্তু অবস্থিতির ফাংশন হতে পারে। যদি কণাটির গতিপথ n সংখ্যক সরলরেখাখণ্ডের সমষ্টি হয়, যাদের প্রত্যেকটিতে বলের মান ধ্রুবক থাকে, তবে বলের দ্বারা সাধিত কর্ম হ'ল

$$W=\mathbf{F}(\mathbf{r}_1).\ \Delta\mathbf{r}_1+\mathbf{F}(\mathbf{r}_2).\ \Delta\mathbf{r}_2+\cdots\cdots+\mathbf{F}(\mathbf{r}_n).\ \Delta\mathbf{r}_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\mathbf{r}_i).\ \Delta\mathbf{r}_i, \tag{55a}$$

যেখানে i-তম রেখাখণ্ডে সরণ ভেক্টর $\Delta\mathbf{r}_i$ এবং বলের মান $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ ধরা হয়েছে। বক্র গতিপথকে, সাধারণতঃ এরূপ সসীম সংখ্যক সরলরেখাখণ্ডে বিভক্ত করা যায় না। তাই, বক্র C-এর উপর A থেকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু B পর্যন্ত কণাটিকে সরিয়ে নিতে হলে বল F-কে যে পরিমাণ কর্ম করতে হবে, তা নির্ণয়ের জন্য চাপ AB-কে বৃহৎ সংখ্যক অমিতক্ষুদ্র চাপে বিভক্ত ব'লে ভাবা হয়। এদের প্রত্যেকটির জন্য বলের দ্বারা সাধিত কর্মের যোগফলের সীমান্ত-মান হ'ল নির্ণেয় কর্ম। কিন্তু অমিতক্ষুদ্র চাপ এবং জ্যা-এর অনুপাতের সীমান্ত-মান 1 লক্ষ্য ক'রে, নির্ণেয় কর্মকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়—

$$W(A\to B)=A \text{ থেকে } B \text{ পর্যন্ত সরণে সাধিত কর্ম}$$

$$=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)\ \Delta\mathbf{s}_i$$

$$=\lim_{\Delta r_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\mathbf{r}_i).\ \Delta\mathbf{r}_i \tag{55b}$$

কিন্তু স্পষ্টতঃ

$$\lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) . \Delta s_i = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\mathbf{F} . d\mathbf{s}), \qquad (55c)$$

যেখানে $\mathbf{r}_1$ এবং $\mathbf{r}_2$ ভেক্টর দ্বারা যথাক্রমে A এবং B বিন্দুর অবস্থিতি ভেক্টর নির্দেশ করা হয়েছে। কাজেই, (55*a*) ও (55*b*) অনুযায়ী নির্ণেয় কর্ম

$$W(A \to B) = \int_A^B (\mathbf{F} . d\mathbf{s}) = \int_A^B (\mathbf{F} . d\mathbf{r})$$

$$= \int_A^B F \cos\theta \, ds, \qquad (55d)$$

যেখানে $d\mathbf{s}$ ভেক্টরের সঙ্গে বল **F** যে কোণ করে তার মান θ, এবং A, B বিন্দুদ্বয়ের অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{r}_1$ ও $\mathbf{r}_2$-এর স্থলে A ও B লেখা হয়েছে। (55*d*)-এর ডানদিকের রাশিগুলি A বিন্দু থেকে B বিন্দু পর্যন্ত বক্র C বরাবর **রেখা সমাকল** বা **পথ সমাকল** সূচিত করে, যার মান বক্র C-এর উপর নির্ভর করতে পারে।

যদি কোন সমতলীয় এলাকার সকল বিন্দুতে বল **F** একমাত্র রূপে নির্দিষ্ট করা হয়, তবে ঐ এলাকাকে বলটির ক্ষেত্র বলা হয়। (55*d*)-এর ডানদিকের রেখা সমাকলের মান যদি শুধুমাত্র A এবং B বিন্দুর উপর নির্ভর করে, অর্থাৎ বক্র C-এর উপর নির্ভর না করে, তবে বল **F**-কে **সংরক্ষী বল** বলা হয়।

গতির দ্বিতীয় সমীকরণের সাহায্যে (55*d*)-এর ডানদিককে একটু ভিন্নরূপে প্রকাশ করা যায়। $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ লক্ষ্য ক'রে, আমরা দেখি

$$(\mathbf{F} . d\mathbf{r}) = \left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \right) = m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \, dt \right) = md(\tfrac{1}{2}v^2).$$

কাজেই (55) থেকে পাওয়া যায়

$$W(A \to B) = \int_A^B md \; (\tfrac{1}{2}v^2) = \left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_A^B = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2, \qquad (56)$$

যেখানে v_A এবং v_B যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে কণাটির বেগ সূচিত করে। $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ রাশিটিকে কণাটির গতীয় শক্তি বলা হয়। আমরা অনেকক্ষেত্রে গতীয় শক্তিকে K প্রতীক দ্বারা সূচিত করব। তাহলে,

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

গতীয় শক্তি একটি স্কেলার রাশি। (57)

(56) থেকে দেখা যায়, A বিন্দু থেকে B পর্যন্ত গমন করতে কণাটি যে পরিমাণ গতীয় শক্তি লাভ করে, তা হ'ল কণাটিকে বক্র C বরাবর A থেকে B বিন্দু পর্যন্ত সরাতে বলের দ্বারা সাধিত কর্মের সমান।

সময় সাপেক্ষে কর্মসাধনের হারকে ক্ষমতা বলে। যেহেতু সময় সাপেক্ষে সরণের হার হ'ল বেগ, সেজন্য ক্ষমতা P-এর মান (54) থেকে আসে

$$P = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\mathbf{F}.\,\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right) = \left(\mathbf{F}.\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = (\mathbf{F}.\,\mathbf{v}). \qquad (58)$$

(57)-এর উভয় পক্ষকে সময় সাপেক্ষে অবকলন করলে আসে

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}mv^2) = \left(m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}.\;\mathbf{v}\right) = (\mathbf{F}.\,\mathbf{v}) = P,$$

অর্থাৎ সময় সাপেক্ষে গতীয় শক্তির পরিবর্তনের হার হ'ল ক্ষমতা।

সংরক্ষী বলের জন্য কণার স্থৈতিক শক্তি U-এর সংজ্ঞা হ'ল

$$U = -\int_{r_0}^{r}(\mathbf{F}.\,d\mathbf{r}) = \int_{r}^{r_0}(\mathbf{F}.\,d\mathbf{r}) \qquad (59)$$

যেখানে $\mathbf{r}_0$ দ্বারা কোন প্রমাণ অবস্থিতি সূচিত হয়। (59) অনুযায়ী, কণাটিকে তার বর্তমান অবস্থিতি থেকে কোন প্রমাণ অবস্থিতিতে নিয়ে যেতে বল F-কে যে পরিমাণ কর্মসাধন করতে হবে, তা হ'ল কণাটির স্থৈতিক শক্তির মান। বল সংরক্ষী হওয়ার ফলে, বর্তমান অবস্থিতি থেকে প্রমাণ অবস্থিতিতে কণাটিকে যে পথেই নিয়ে যাওয়া হোক না কেন, স্থৈতিক শক্তির মান একই থাকবে।

দ্বিমাত্রিক সমকোণীয় কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্রে অক্ষরেখার দিশায় বলের উপাংশগুলি F_x ও F_y দ্বারা সূচিত করা হ'ল। কণাটির বর্তমান অবস্থিতি $\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}$ এবং প্রমাণ অবস্থিতি $\overrightarrow{OH}=\mathbf{r}_0$ দ্বারা সূচিত করলে, (59) অনুযায়ী কণাটির স্থৈতিক শক্তি হ'ল

$$U=-\int_H^P (F_x.\mathbf{i}+F_y.\mathbf{j}).(dx.\mathbf{i}+dy.\mathbf{j})$$

$$=-\int_H^P (F_x\,dx+F_y\,dy) \qquad (60)$$

সংজ্ঞা অনুযায়ী (60)-এর ডানদিকের সমাকলটি H এবং P বিন্দুর উপর নির্ভরশীল হবে এবং H ও P বিন্দুর অন্তর্বর্তী পথের উপর নির্ভর করবে না। এর অর্থ হ'ল

$$\mathbf{F}.\,d\mathbf{r}=F_x\,dx+F_y\,dy \qquad (61a)$$

রাশিটি একটি সম্পূর্ণ অবকল হবে। কিন্তু অবকল সমীকরণের তত্ত্ব থেকে আমরা জানি যে (61a) একটি সম্পূর্ণ অবকল রূপায়িত করবে, যদি

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad (61b)$$

হয়। সুতরাং সমতলে, কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে বলের ক্ষেত্রটি সংরক্ষী হতে হলে (61b) সম্বন্ধটি ক্ষেত্রের সকল বিন্দুতে সিদ্ধ হতে হবে। লক্ষ্য করা দরকার যে শুধুমাত্র সংরক্ষী বলের জন্যই স্থৈতিক শক্তির অস্তিত্ব আছে। সাধারণতঃ, প্রমাণ অবস্থায় কণাটির স্থৈতিক শক্তির মান শূন্য ধরা হয়।

সংরক্ষী বলের জন্য,

$$\mathbf{F}.\,d\mathbf{r}=F_x\,dx+F_y\,dy=-dU. \qquad (62)$$

সুতরাং, (56), (62) এবং (55) থেকে দেখা যায়

$$\tfrac{1}{2}mv_B^2-\tfrac{1}{2}mv_A^2=W(A\rightarrow B)$$

$$=\int_A^B (\mathbf{F}.d\mathbf{r})=-\int_A^B dU=-(U_B-U_A).$$

A এবং B যে কোন দুটি বিন্দু ব'লে, পক্ষান্তর দ্বারা পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}mv_B^2+U_B=\tfrac{1}{2}mv_A^2+U_A=\text{ধ্রুবক}, \qquad (63)$$

অর্থাৎ **সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে, কণার গতীয় শক্তি এবং স্থৈতিক শক্তির যোগফল ধ্রুবক।** এই নিয়মটি **শক্তি সংরক্ষণ নীতি** নামে পরিচিত।

বলবিদ্যার এবং গাণিতিক পদার্থবিদ্যায় শক্তি সংরক্ষণ নীতি অতিশয় গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে। লক্ষ্য করার বিষয়, শক্তি সংরক্ষণ নীতি (63)-তে ক্রিয়াশীল বল সরাসরি উপস্থিত নেই। একাধিক কণা বা বস্তুর সম্মিলিত গতি আলোচনার সময় প্রত্যেক কণার জন্য গতীয় সমীকরণ সমাধান করা কঠিন হতে পারে। সেক্ষেত্রে, শক্তি সংরক্ষণ নীতি প্রয়োগ ক'রে গতি সম্বন্ধীয় মূল্যবান তথ্য লাভ করা যেতে পারে। যদি প্রত্যেকটি কণার গতীয় সমীকরণ আমরা সমাধান করতে পারি, তবে অবশ্য শক্তি সংরক্ষণ নীতির প্রয়োগে নতুন কোন তথ্য পাওয়া যাবে না।

1·7. **একক ও মাত্রা**—বলবিদ্যায় যেসকল ভৌতরাশির সঙ্গে আমাদের পরিচয় ঘটে, তাদের সম্বন্ধে সম্যক্ জ্ঞানলাভের জন্য রাশিগুলি পরিমাপ করা ও পরস্পর তুলনা করা বিশেষ প্রয়োজন হয়। গতিবিষয়ক ঘটনার আলোচনায় সাধারণতঃ আমরা জানতে চাই, ঘটনাটির উপর কোন্ কোন্ ভৌতরাশির কতখানি প্রভাব বা কোন্ কোন্ রাশির গুরুত্ব কতখানি। এই উদ্দেশ্যে ভৌতরাশিগুলির শ্রেণীবিভাগ করা প্রয়োজন হয় এবং ভৌতরাশি-গুলিকে ন্যূনতম সংখ্যক **মৌলিক ভৌতরাশির** সাহায্যে প্রকাশ করা খুব সুবিধাজনক হয়। বলবিদ্যা বিষয়ক আলোচনায় মৌলিক রাশিগুলি হ'ল দৈর্ঘ্য, ভর ও সময়। অন্য কোন রাশির সাহায্যে মৌলিক রাশিগুলির সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয় এবং এদের অসংজ্ঞাত মৌলিক রাশি রূপেই গ্রহণ করা হয়।

কোন ভৌতরাশির পরিমাণ তখনই আমরা জানতে পারি, যখন রাশিটি একটি নির্দিষ্ট এককের কতগুণ তা জানা যায়। এই উদ্দেশ্যে সর্বাগ্রে মৌলিক রাশিগুলির এককের মান নির্দিষ্ট করা হয়। মৌলিক রাশিগুলির এককের রূপে অন্যান্য রাশির একক নির্ধারণ করা যায়। এভাবে, নির্ধারিত একক-গুলিকে **অবকলিত একক** বলা হয়। যে সম্বন্ধের সাহায্যে অবকলিত একককে মৌলিক এককের রূপে প্রকাশ করা হয়, তাকে এককের **মাত্রা** বলা হয়। অবকলিত এককটি যে ভৌতরাশির একক, সেই রাশি সম্বন্ধেও মাত্রা শব্দটি ব্যবহার করার রীতি আছে। ভৌতরাশির মাত্রা কিন্তু ব্যবহৃত এককের

উপর নির্ভরশীল নয়,—অর্থাৎ মৌলিক রাশিগুলির এককের মান পরিবর্তিত হলেও রাশির মাত্রার পরিবর্তন হবে না।

গাণিতিক পদার্থবিদ্যা ও কারিগরী বিদ্যার বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভৌতরাশি পরিমাপের জন্য প্রয়োজন অনুযায়ী বিভিন্ন একক ব্যবহারের রীতি চালু আছে। যেমন, গাউসীয়* সি জি এস (Centimetre Gram Second or C G S) পদ্ধতি বা এম কে এস (Metre Kilogram Second বা M K S) পদ্ধতি বা পুরোনো আমলের ব্রিটিশ এফ পি এস (Foot Pound Second) পদ্ধতি। বলবিদ্যায় যেসকল ভৌতরাশি উদ্ভূত হয়, তাদের সংজ্ঞা থেকেই রাশিগুলি পরিমাপ করার উপায় লাভ করা যায়। মৌলিক রাশিগুলি পরিমাপের জন্য আন্তর্জাতিক স্বীকৃতি অনুযায়ী প্রমাণ-মাপ স্থির করা হয়েছে।† প্রমাণ-মাপের সঙ্গে তুলনা ক'রে আলোচ্য রাশিকে পরিমাপ করা সম্ভব।

এম কে এস পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক এক মিটার, ভরের একক এক কিলোগ্রাম এবং সময়ের একক এক সেকেণ্ড ধরা হয়। সি জি এস পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক সেণ্টিমিটার হ'ল এক মিটারের একশত ভাগের একভাগ ; ভরের একক গ্রাম হ'ল এক কিলোগ্রামের সহস্রভাগের এক ভাগ।

বলবিদ্যায় বহুল ব্যবহৃত কতকগুলি রাশির মাত্রা নিম্নে নির্ণয় করা হচ্ছে। এই উদ্দেশ্যে, দৈর্ঘ্য, ভর ও সময়ের মৌলিক এককগুলিকে যথাক্রমে L, M এবং T প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হ'ল। কোন ভৌতরাশি Q-এর মাত্রা [Q] প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হবে। তাহলে, সংজ্ঞানুসারে বেগ V-এর মাত্রা হ'ল

$$\left[\mathrm{V}\right]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}, \tag{64a}$$

এবং ত্বরণ f-এর মাত্রা হ'ল

$$\left[f\right]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}. \tag{64b}$$

---

* Gaussian. Carl Friedrich Gauss (1777—1855)

† ফ্রান্সে, International Bureau of Weights and Measures-এর কার্যালয়ে রক্ষিত একটি ধাতব দণ্ডের দৈর্ঘ্যকে সাধারণতঃ এক মিটার এবং একটি ধাতব খণ্ডকের ভরকে এক কিলোগ্রাম প্রমাণ-মাপ ধরা হয়। সময়ের প্রমাণ-মাপ এক সেকেন্ড হ'ল ১৯০০ খ্রীষ্টাব্দ সৌর বৎসরের 1/31556925·975 অংশ। এবিষয়ে বিস্তারিত আলোচনার জন্য ডঃ দেবীপ্রসাদ রায়চৌধুরী প্রণীত এবং পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ প্রকাশিত "পদার্থের ধর্ম" পুস্তক দ্রষ্টব্য।

নিউটন প্রদত্ত গতির দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী বল F-এর মাত্রা হ'ল

$$\left[F\right]=\frac{ML}{T^2}. \tag{64c}$$

ভর ও বেগের গুণফল রৈখিক ভরবেগ p-এর মাত্রা হ'ল

$$\left[p\right]=\frac{ML}{T}. \tag{64d}$$

কর্ম W এবং স্থৈতিক শক্তি U, উভয় রাশিই বল এবং দূরত্বের গুণফল হওয়ার জন্য

$$\left[W\right]=\frac{ML}{T^2}.L=\frac{ML^2}{T^2}=\left[U\right]. \tag{64e}$$

আবার, গতীয় শক্তি K, ভর এবং বেগের বর্গের গুণফলের অর্ধেক হওয়ার জন্য

$$\left[K\right]=\frac{ML^2}{T^2},$$

অর্থাৎ শক্তি E-এর মাত্রা হ'ল

$$\left[E\right]=\frac{ML^2}{T^2}.$$

আবার সময়ের সঙ্গে কর্ম সাধনের হার, ক্ষমতা P হওয়ার জন্য

$$\left[P\right]=\frac{ML^2}{T^3}. \tag{64f}$$

পূর্বে বলা হয়েছে, মৌলিক রাশিগুলির কোন পরিবর্তন না হলে, ভৌত-রাশির পরিবর্তন হয় না। তাই কোন নির্দিষ্ট ভৌতরাশির মাত্রাও নির্দিষ্ট থাকে। **বলবিদ্যা আলোচনায় লব্ধ কোন সমীকরণের প্রত্যেক পদের একই মাত্রা হবে,** —কারণ মাত্রা বিভিন্ন হলে উভয়পক্ষের পদগুলি পরস্পর সমান হতে পারে না। রাশিগুলির মাত্রা এক হলেই কেবল তাদের মধ্যে যোগ বা বিয়োগ ক্রিয়া অর্থবহ হয়। যেমন, একটি কণার ঋজুরেখ গতির আলোচনায়, দ্বিতীয় অধ্যায়ে (7) সমীকরণে আমরা দেখতে পাব

$$v^2=u^2+2fx,$$

যেখানে v এবং u বেগ এবং f ত্বরণ ও x দূরত্ব রূপায়িত করে। তাহলে,

$$\left[v^2\right]=\left(\frac{L}{T}\right)^2=\frac{L^2}{T^2}$$

এবং

$$\left[fx \right] = \frac{L}{T} \cdot L = \frac{L^2}{T^2},$$

অর্থাৎ, প্রত্যেক পদের মাত্রা L^2/T^2-এর সমান। বলবিদ্যায় যেসকল সমীকরণ দেখা যাবে, তাদের সত্যতা এভাবে যাচাই করা যায়।

(64*a*—*f*) সমীকরণগুলির সাহায্যে নিম্নে প্রদত্ত অবকলিত এককগুলি পাওয়া যায়। সি জি এস পদ্ধতিতে, দৈর্ঘ্যের একক cm (সেণ্টিমিটার), ভরের একক gm (গ্রাম) এবং সময়ের একক *s* (সেকেণ্ড) হওয়ার জন্য,

বেগের একক $= 1 \text{ cm} / s$,

ত্বরণের একক $= 1 \text{ cm} / s^2$

বলের একক $= 1 \text{ gm cm} / s^2$

সি জি এস পদ্ধতিতে বলের এককের একটি আলাদা নাম আছে, তা হ'ল এক **ডাইন** (dyne)। প্রতীকের সাহায্যে

এক ডাইন $= 1$ dyn

লেখা হয়। তাহলে,

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ gm cm} / s^2. \tag{65a}$$

অনুরূপভাবে,

শক্তি বা কর্মের একক $= 1 \text{ gm cm}^2/s^2 = 1 \text{ dyn cm}$, (65*b*)

ক্ষমতার একক $= 1 \text{ gm cm}^2 / s^3 = 1 \text{ dyn cm} / s$. (65*c*)

সি জি এস পদ্ধতিতে **কর্মের** বা **শক্তির এককের নাম এক আর্গ।** তাহলে,

$$\text{এক আর্গ} = 1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn cm}. \tag{65d}$$

কাজেই,

$$\text{ক্ষমতার একক} = 1 \text{ erg} / s \tag{65e}$$

লেখাও যায়। ব্যবহারিক দিক থেকে বলের একক ডাইন বা শক্তির একক আর্গ-এর মান অতিশয় ক্ষুদ্র হওয়ার জন্য অসুবিধাজনক। বর্তমানে বহুল প্রচলিত এম কে এস পদ্ধতি, সেদিক থেকে সুবিধাজনক। এই পদ্ধতিতে

দৈর্ঘ্যের একক = এক মিটার $= 1 \text{ m} = 1 \times 10^2 \text{cm}$,

ভরের একক = এক কিলোগ্রাম $= 1 \text{ kg} = 1 \times 10^3 \text{gm}$.

কাজেই, (65*c*) অনুযায়ী

বলের একক $= 1 \text{ kg m}/s^2 = 1 \times 10^3 \times 10^2 \text{gm cm}/s^2$

এম কে এস পদ্ধতিতে বলের এককের নাম এক **নিউটন** (Newton)। প্রতীকের সাহায্যে,

$$\text{এক নিউটন} = 1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn.} \tag{66a}$$

(64*e*) অনুযায়ী

$$\text{কর্মের একক} = 1 \text{ kg } m^2/s^2 = 1 \text{ N}m$$

এই এককের নাম এক **জুল** (Joule)[1]। প্রতীকের সাহায্যে

$$\text{এক জুল} = 1\text{J} = 1 \text{ N}m = 10^7 \text{ erg.} \tag{66b}$$

অনুরূপভাবে, (64*f*) অনুযায়ী

$$\text{ক্ষমতার একক} = 1 \text{ kg } m^2/s^3 = 1 \text{ J}/s. \tag{66c}$$

এই এককের নাম এক **ওয়াট** (Watt)[2]। প্রতীকের সাহায্যে

$$\text{এক ওয়াট} = 1\text{W} = 1 \text{ J}/s. \tag{66d}$$

নিম্নের তালিকায় কয়েকটি ভৌতরাশির মাত্রা ও একক দেখানো হয়েছে—

	রাশি	ঘাত	সি জি এস		এম কে এস	
			একক	প্রতীক	একক	প্রতীক
মৌলিক	দৈর্ঘ্য	L	সেন্টিমিটার	cm	মিটার	*m*
	ভর	M	গ্রাম	gm	কিলোগ্রাম	kg
	সময়	T	সেকেন্ড	*s*	সেকেন্ড	*s*
অবকলিত	বেগ	L/T	—	cm/*s*	—	*m*/*s*
	ত্বরণ	L/T²	—	cm/*s*²	—	*m*/*s*²
	বল	ML/T²	ডাইন	dyn	নিউটন	N
	কর্ম ও শক্তি	ML²/T²	আর্গ	erg	জুল[1]	J(=N*m*)
	ক্ষমতা	ML²/T³	—	erg/*s*	ওয়াট[2]	W(=J/*s*)

তালিকা—কয়েকটি রাশির মাত্রা ও একক।

[1] J. P. Joule (1818—1889)-এর নামানুসারে।

[2] James Watt (1736—1804)-এর নামানুসারে।

এফ পি এস পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক এক ফুট, ভরের একক এক পাউণ্ড এবং সময়ের একক এক সেকেণ্ড। সি জি এস এককের সঙ্গে এদের সম্বন্ধ নিম্নরূপ—

1 ft = এক ফুট = 30·48 cm.

1 lb = এক পাউণ্ড (ভর) = 453·6 gm.

সেকেণ্ডের মান উভয় পদ্ধতিতে অভিন্ন। এককালে ইংলণ্ডে এবং অন্যান্য অনেক দেশে এফ পি এস পদ্ধতির সবিশেষ প্রচলন ছিল। কিন্তু আধুনিককালে এম কে এস ও সি জি এস পদ্ধতিই প্রধানতঃ ব্যবহৃত হয় এবং এফ পি এস পদ্ধতি প্রায় অচল। আলোচনার পূর্ণতার উদ্দেশ্যে এফ পি এস পদ্ধতিতে কয়েকটি সুপরিচিত ভৌতরাশির একক এখানে লিপিবদ্ধ হচ্ছে।

এফ পি এস পদ্ধতিতে বলের এককের নাম এক **পাউণ্ডাল।** (64c) অনুযায়ী, প্রতীকের সাহায্যে

$$1 \text{ Poundal} = 1 \text{ lb ft}/s^2. \qquad (66e)$$

কর্মের একক এক ফুট-পাউণ্ডাল এবং ক্ষমতার একক এক ফুট-পাউণ্ডাল প্রতি সেকেণ্ড।

মহাকর্ষীয় একক—উপরে একক সম্বন্ধীয় যেসকল বিভিন্ন পদ্ধতির আলোচনা করা হয়েছে, সেগুলি প্রধানতঃ তত্ত্বীয় আলোচনায় ব্যবহৃত হয়, এবং তাদের **পরম একক** বলা হয়। এছাড়াও, ইঞ্জিনীয়ারিং প্রয়োগের জন্য আর এক প্রকারের একক ব্যবহারের রীতি আছে, যাদের **মহাকর্ষীয় একক** বলে। মহাকর্ষীয় এককের মান মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণ g-এর মানের উপর নির্ভরশীল। ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত কোন বস্তুকে পৃথিবী স্বীয় কেন্দ্রের দিকে যে বলের দ্বারা আকর্ষণ করে, তাকে সেই বস্তুর **ওজন** বলে। ভূ-পৃষ্ঠের কোন একটি স্থানে মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণের মান g প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হলে, সেই স্থানে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর ওজন হ'ল mg. ভূ-পৃষ্ঠের বিভিন্নস্থানে g-এর মান বিভিন্ন ব'লে, স্থান পরিবর্তন করা হলে আলোচ্য বস্তুটির ওজনেরও পরিবর্তন হবে। এফ পি এস পদ্ধতিতে পশ্চিমবঙ্গে g-এর আসন্নমান 32 ft/s^2, বা সি জি এস পদ্ধতিতে 980 cm/s^2. এফ পি এস পদ্ধতিতে বলের মহাকর্ষীয় এককের নাম **পাউণ্ড-ওজন**। যে বল এক পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া ক'রে ভূ-কেন্দ্র অভিমুখে g ft/s^2 ত্বরণ সৃষ্টি করে, তাকে এক পাউণ্ড-ওজন বলে। প্রতীকের সাহায্যে

$$1 \text{ পাউণ্ড-ওজন} = g \text{ পাউণ্ডাল} = 32 \text{ পাউণ্ডাল, আসন্নভাবে।} \qquad (66f)$$

অনুরূপভাবে,

1 কিলোগ্রাম-ওজন $= g$ নিউটন $= 9·8$ নিউটন, আসন্নভাবে। (66g)

কর্মের মহাকর্ষীয় একক এফ পি এস পদ্ধতিতে ফুট-পাউণ্ড ওজন এবং এম কে এস পদ্ধতিতে কিলোগ্রাম-ওজন-মিটার। ক্ষমতার মহাকর্ষীয় একক এফ পি এস পদ্ধতিতে ফুট-পাউণ্ড ওজন প্রতি সেকেণ্ড এবং এম কে এস পদ্ধতিতে কিলোগ্রাম-ওজন-মিটার প্রতি সেকেণ্ড। প্রয়োগের সুবিধার জন্য ক্ষমতার মহাকর্ষীয় একক **অশ্বশক্তি** ব্যবহার করা হয়, যার মান 550 ফুট-পাউণ্ড ওজন প্রতি সেকেণ্ডের সমান। প্রতীকের সাহায্যে,

1 H. P. = এক অশ্বশক্তি = 550 ft.-pound weight/s. (66h)

এফ পি এস পদ্ধতির প্রচলন আজকাল হ্রাস পেয়েছে। তৎপরিবর্তে এম কে এস পদ্ধতির বহুল ব্যবহার দেখা যাচ্ছে। ক্ষমতার মহাকর্ষীয় একক এম কে এস পদ্ধতির অশ্বশক্তির মান 75 কিলোগ্রাম-ওজন-মিটার প্রতি সেকেণ্ড। প্রতীকের সাহায্যে

1 H. P. (এম কে এস) = 75 kg weight m/s. (66i)

এম কে এস পদ্ধতিতে মহাকর্ষীয় এককগুলি নিম্নে একসঙ্গে লেখা হ'ল :

বল 1 কিলোগ্রাম-ওজন $= g$ নিউটন

কর্ম 1 কিলোগ্রাম-ওজন-মিটার $= g$ জুল

ক্ষমতা 1 কিলোগ্রাম-ওজন-মিটার প্রতি সেকেণ্ড $= g$ ওয়াট

1 H. P. $= 75g$ ওয়াট প্রতি সেকেণ্ড $= 75g$ w/s.

উদাহরণ : এক পদ্ধতি থেকে অন্য পদ্ধতিতে পরিবর্তন—

1 ft. = 30·48 cm, 1 lb = 453·6 gm এবং $g = 9·81$ m/s^2 ধ'রে এক অশ্বশক্তির (এফ পি এস) মান এম কে এস পরম এককে প্রকাশ করতে হবে।

(66h) অনুযায়ী

1 H. P. (এফ পি এস) = 550 ft.-pound wt./s

$= 550 \times 30·48 \times 10^{-2} \times 453·6 \times 10^{-3} \times 9·81$ m kg./s

$= 746$ w/s (আসন্নভাবে)

আবার,

1 H. P. (এম কে এস) $= 75g$ $w/s = 75 \times 9·81$ w/s

$= 736$ w/s (আসন্নভাবে)।

1'8. দেশ, কাল ও নির্দেশ-কাঠামো। গ্যালিলীয় নিত্যতা—গতিবিদ্যা আলোচনার সময় ধরা হয় যে আলোচ্য কণাটির গতি একটি ত্রিমাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশে সংঘটিত হচ্ছে। গতি পরিমাপ করার জন্য একটি নির্দেশ-কাঠামোর প্রয়োজন। পূর্বেই বলা হয়েছে, নিউটনের গতির প্রথম ও দ্বিতীয় নিয়ম সকলপ্রকার নির্দেশ-কাঠামোর বেলা খাটে না। প্রকৃতপক্ষে, এই নিয়ম-দুটির জন্য ত্বরণহীন নির্দেশ-কাঠামো চাই, অর্থাৎ নির্দেশ-কাঠামোটি স্থির অথবা সুষমবেগে সরলরেখায় গমনকারী হতে পারে। **এরূপ কাঠামোকে জড়ত্বীয় কাঠামো বা গ্যালিলীয় নির্দেশ-কাঠামো বলে।** প্রশ্ন উঠতে পারে, এরূপ কোন কাঠামোর আদৌ অস্তিত্ব আছে কি, অথবা এমন কয়টি কাঠামো থাকতে পারে? লক্ষ্য করার বিষয় যে, ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত কোন বীক্ষণাগার কিন্তু যথার্থ গ্যালিলীয় নির্দেশ-কাঠামো হতে পারে না, কারণ ভূ-পৃষ্ঠ স্থির অবস্থায় নেই। আমরা জানি, পৃথিবী স্বীয় অক্ষের উপর ঘুরছে এবং বছরে একবার সূর্যকে প্রদক্ষিণ করছে। কাজেই ভূ-পৃষ্ঠ ত্বরণশীল। একটু হিসাব করলে দেখা যায়, এই ত্বরণের পরিমাণ কিন্তু খুব বেশি না। পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য ভূ-পৃষ্ঠে বিষুবরেখায় অবস্থিত কোন স্থির কণা ভূ-কেন্দ্র সাপেক্ষে যে কেন্দ্রাভিমুখী ত্বরণ লাভ করে, তার পরিমাণ (42*c*) সমীকরণ অনুযায়ী

$$f = a\omega^2,$$

যেখানে পৃথিবীর গড় ব্যাসার্ধ a এবং পৃথিবীর কৌণিক বেগ ω. পৃথিবী একদিনে 2π কোণ ঘুরে আসছে ব'লে

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \backsimeq \cdot 727 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}.$$

পৃথিবীর গড় ব্যাসার্ধ $a = 6{\cdot}37 \times 10^8$ cm ধরলে, কেন্দ্রাভিমুখী ত্বরণের মান হ'ল

$$f = 6{\cdot}37 \times 10^8 \times (\cdot 727 \times 10^{-4})^2 \backsimeq 3{\cdot}37 \text{ cm/sec}^2. \quad (67a)$$

মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ $g = 980$ cm/sec^2-এর তুলনায় এই ত্বরণ ক্ষুদ্র। পৃথিবীর বার্ষিক গতির জন্য ত্বরণের মান কিন্তু আরও ক্ষুদ্র। এই ত্বরণের মান দাঁড়ায়

$$f = (1{\cdot}5 \times 10^{13}) \times \left(\frac{2\pi}{365 \times 24 \times 60 \times 60}\right)^2 \backsimeq 0{\cdot}6 \text{ cm/sec}^2 \quad (67b)$$

আবার সূর্যও স্থির নেই, তবে সূর্যের গতির জন্য ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত আলোচ্য কণাটির ত্বরণ আরও ক্ষুদ্র। কাজেই, পৃথিবীর আহ্নিক ও বার্ষিক গতির জন্য ত্বরণ $(67a)$ এবং $(67b)$-কে হিসেবের মধ্যে ধরলে ভূ-পৃষ্ঠে স্থির কোন দর্শক-সাপেক্ষে জড়ত্বীয় নির্দেশ-কাঠামোতে নিউটনের গতির নিয়মগুলি আসন্নভাবে খাটবে।

জড়ত্বীয় নির্দেশ-কাঠামোর অস্তিত্ব আছে কিনা এই প্রশ্নের উত্তরে অনেকে নিশ্চল তারকাদের দিকে নির্দেশ করেন, যাহাদের সাহায্যে জড়ত্বীয় নির্দেশ-কাঠামো পাওয়া যেতে পারে। কিন্তু তাতেও সমস্যার সমাধান হয় না, কারণ নিশ্চল তারা ব'লে সত্যি কোন তারা আছে কি? প্রকৃতপক্ষে, জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা এখন আর কোন তারাকেই নিশ্চল ব'লে ভাবেন না, তবে বহুদূরবর্তী তারাদের জন্য ভূ-পৃষ্ঠে স্থির কণার ত্বরণ এত কম যে তা হয়তো যন্ত্রপাতি দ্বারা পরিমাপে ধরা পড়ে না। কাজেই, সঠিক জড়ত্বীয় না হলেও আসন্নভাবে জড়ত্বীয় নির্দেশ-কাঠামো আমাদের জানা আছে। আবার প্রয়োজন হলে, আকাশে তারাদের দিকে না তাকিয়ে ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত কোন বীক্ষণাগারে পরীক্ষামূলকভাবে আসন্ন জড়ত্বীয় নির্দেশ কাঠামো প্রতিষ্ঠিত করা সম্ভব, যা কাজ চালানোর পক্ষে যথেষ্ট হবে।

একটি জড়ত্বীয় নির্দেশ কাঠামো পাওয়া গেলে, এরূপ অসংখ্য জড়ত্বীয় নির্দেশ কাঠামো পাওয়া যাবে। কারণ, গতির প্রথম নিয়ম অনুযায়ী, বস্তুর স্থির অবস্থা এবং সুষমবেগে সরলরেখায় গমনাবস্থা, এই দুটি অবস্থার মধ্যে পার্থক্য করা হয়নি। $S(x, y, z, t)$ একটি জড়ত্বীয় নির্দেশ-কাঠামো হলে, $S'(x', y', z', t')$ও একটি জড়ত্বীয় নির্দেশ-কাঠামো হবে, যদি S' কাঠামো S সাপেক্ষে সুষমবেগে সরলরেখায় গমনরত থাকে,—অর্থাৎ যদি

$$\begin{aligned} x' &= x + a_0 t, \\ y' &= y + b_0 t, \\ z' &= z + c_0 t, \\ t' &= t \end{aligned} \tag{68}$$

হয়, যেখানে a_0, b_0, c_0 অচর রাশি। রূপান্তর (68)-এর আরও সামান্যকরণ করা যেতে পারে। আমরা ভাবতে পারি, x, y, z—অক্ষরেখাগুলির সমকোণীয় রূপান্তর করা হ'ল, এবং নতুন অক্ষরেখাগুলি ξ, η, ζ, যাদের জন্য

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{69}$$

তাহলে, (ξ, η, ζ) এবং (x, y, z)-এর মধ্যে সম্বন্ধগুলি হ'ল

	x	y	z
ξ	a_{11}	a_{12}	a_{13}
η	a_{21}	a_{22}	a_{23}
ζ	a_{31}	a_{32}	a_{33}

অর্থাৎ $\xi = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$,

এবং $x = a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta$ ইত্যাদি।

এখানে a_{ij} দ্বারা দিক্-কোসাইন বুঝানো হয়েছে, যাদের জন্য নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি খাটে :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}^{2} = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}^{2} = 1, \quad \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, a_{jk} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, a_{ik} = 0 \qquad (71)$$

(70) থেকে ξ, η, ζ-এর মান (68)-এর ডানদিকে যথাক্রমে x, y, z-এর স্থলে বসালে নিম্নলিখিত সামান্যীকৃত রূপান্তর পাওয়া যায় :

	x	y	z	t
x'	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_0
y'	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_0
z'	a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_0
t'	0	0	0	1

(72)

উপরের রূপান্তরে যেমন বামদিক থেকে ডানদিকে পড়া যায়, তেমনি উপর থেকে নীচেও পড়া যেতে পারে। যেমন,

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_0 t,$$

অথবা

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z',$$

ইত্যাদি। (72) **গ্যালিলীয় রূপান্তর** নামে পরিচিত। **এই রূপান্তরে সময় t অপরিবর্তিত থাকে,** অর্থাৎ

$$t' = t. \quad (73)$$

গতিবিদ্যা তথা পদার্থবিদ্যায় গ্যালিলীয় রূপান্তর বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করেছে। কারণ,

পদার্থবিদ্যার মূল নিয়মগুলির রূপ গ্যালিলীয় রূপান্তর দ্বারা সম্বন্ধযুক্ত দুটি নির্দেশ-কাঠামোতে অপরিবর্তিত থাকে।

উপরের বক্তব্যটিকে সাধারণতঃ প্রকল্প হিসেবে গ্রহণ করা হয়, এবং বস্তুর বেগ যদি আলোকের বেগের তুলনায় ক্ষুদ্র হয়, তবে এই প্রকল্প যথার্থ ব'লে ভাবা হয়। এই প্রকল্পটি ধ্রুপদী বলবিদ্যায় **গ্যালিলীয় নিত্যতা** নামে পরিচিত। লক্ষ্য করার বিষয় যে যদিও এখানে **পরম গতি** ব'লে কিছুর অস্তিত্ব স্বীকার করা হয়নি এবং দুটি বস্তুর মধ্যে আপেক্ষিক গতিকেই শুধু স্বীকার করা হয়েছে, তথাপি সময়কে **"পরম সময়"** ব'লে ভাবা হয়েছে, যা অপরিবর্তিত থাকে। পরবর্তীকালে, আইনষ্টাইন[1] আপেক্ষিকতাবাদে বলেছেন, পরম সময় ব'লে কোন কিছুর অস্তিত্ব নেই এবং বস্তুর বেগ যদি আলোকের বেগের তুলনায় ক্ষুদ্র না হয়, তবে গ্যালিলীয় রূপান্তর ভুল। সেক্ষেত্রে গ্যালিলীয় রূপান্তর (72)-এর পরিবর্তে **লোরেনট্‌স্[2] রূপান্তর** নিতে হয়। কাজেই গ্যালিলীয় নিত্যতার সামান্যীকৃত রূপ হ'ল

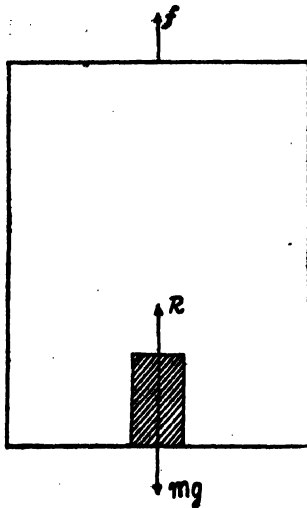
"পদার্থবিদ্যার মূল নিয়মগুলি দুটি লোরেনট্‌স্ রূপান্তর দ্বারা সম্বন্ধযুক্ত নির্দেশ-কাঠামোতে নিত্য থাকে",

এবং এই বক্তব্য, বস্তুর বেগ যাই হোক না কেন, সর্বক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

উদাহরণ :

6. এক ব্যক্তি একটি লিফ্‌টের ভিতর দাঁড়িয়ে আছে। লিফ্‌টটি উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিশায় গমনাগমন করছে। ব্যক্তিটির ভর m এবং ঊর্ধ্বাভিমুখে লিফ্‌টের ত্বরণ f হলে, লিফ্‌টের পাটাতনে লোকটি যে চাপ দিচ্ছে তার মান নির্ণয় করতে হবে।

[1] A. Einstein (1879—1955), [2] Lorentz (1904)

ধরা যাক, লিফ্‌টের পাটাতনে লোকটি যে চাপ দিচ্ছে, তার প্রতিক্রিয়া R. লোকটির ওজন mg উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে ক্রিয়া করছে, আর প্রতিক্রিয়া R উল্লম্ব উর্ধ্বাভিমুখে ক্রিয়া করছে। তাহলে, লোকটির উপর ক্রিয়াশীল মোট বল $(R-mg)$, উল্লম্ব উর্ধ্বাভিমুখে ক্রিয়াশীল। ঐ দিশায় লিফ্‌টের ত্বরণ, যা ব্যক্তিটিরও ত্বরণ, f ধরা হয়েছে ব'লে, গতির দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী

চিত্র 1·13—গমনশীল লিফ্‌ট

$$R-mg=mf.$$

অতএব,

$$R=m(g+f).$$

অর্থাৎ,

$$R=\frac{m(g+f)}{mg}\cdot W$$

$$=\left(1+\frac{f}{g}\right)W, \quad \text{(i)}$$

যেখানে $W(=mg)$ লোকটির ওজন। এখান থেকে দেখা যাচ্ছে, লিফ্‌টটি ত্বরণহীন হলে $f=0$ এবং পাটাতনে লোকটির চাপ ব্যক্তিটির ওজনের সমান, —অর্থাৎ লিফ্‌টটি যদি স্থির থাকে, বা সুষমবেগে উর্ধ্বাভিমুখে বা নিম্নাভিমুখে গমন করে, তবে নির্ণেয় চাপ ব্যক্তিটির ওজনের সমান। এক্ষেত্রে, আমরা বলতে পারি, লোকটির আপাত ওজন R, প্রকৃত ওজন W-এর সমান।

আবার, $f>0$ হলে $\left(1+\frac{f}{g}\right)>1$ এবং লোকটির আপাত ওজন R, প্রকৃত ওজন W-এর চেয়ে বড়।

পুনশ্চ, যদি $f<0$ হয়, অর্থাৎ ত্বরণ নিম্নাভিমুখী হয়, তবে $\left(1+\frac{f}{g}\right)<1$ এবং লোকটির আপাত ওজন প্রকৃত ওজনের চেয়ে ছোট হবে। যদি $f=-g$ হয়, তবে (i) থেকে দেখা যাচ্ছে

$$R=0,$$

অর্থাৎ লোকটির আপাত ওজন শূন্য। প্রতিক্রিয়ার মান শূন্য হওয়ায় বোঝা

যায় পাটাতনের সঙ্গে লোকটির কোন সংস্পর্শ নেই। লোকটিকে শূন্যে ছেড়ে দিলে মাধ্যাকর্ষণের জন্য যেরূপ গতি হ'ত, এক্ষেত্রেও সেরূপ মুক্ত পতন হবে।

যদি $f < -g$ হয়, তাহলে (i) থেকে দেখা যায় $R < 0$. এক্ষেত্রে লোকটি পাটাতন থেকে বিচ্ছিন্ন হয়ে পড়বে।

7. বল $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ হলে, $y = 2x^2$ বক্র বরাবর O (0, 0) থেকে A(1,2) পর্যন্ত

$$\int_0^A \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

পথ-সমাকলটির মান নির্ণয় করতে হবে। দেখাতে হবে বলটি সংরক্ষী।

উপরোক্ত পথ-সমাকলটির মান বিভিন্ন উপায়ে নির্ণয় করা যায়। নিম্নে উপায়গুলি দেখানো হচ্ছে :

(i) ধরা যাক

$$x = \theta, \text{ এবং } y = 2\theta^2 \; ;$$

এই মান ধরলে প্রদত্ত বক্রটির সমীকরণ সিদ্ধ হয়। তাহলে,

$$\mathbf{F} = \theta^3\mathbf{i} + 4\theta^4\mathbf{j}, \; \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \theta\mathbf{i} + 2\theta^2\mathbf{j},$$

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 4\theta\mathbf{j})d\theta.$$

কাজেই,

$$\int_0^A \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{\theta=1} (\theta^3 + 16\theta^5)d\theta = \frac{\theta^4}{4} + 16\cdot\frac{\theta^6}{6}\Big]_{\theta=0}^{\theta=1} = \frac{35}{12}.$$

(ii) যে পথ C বরাবর সমাকলন করতে হবে, সেখানে সকল বিন্দুতে $y = 2x^2$ হওয়ার জন্য, C বরাবর

$$\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + 4x^4\mathbf{j}$$

এবং

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 4x\mathbf{j})dx.$$

সুতরাং

$$\int_0^A \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^1 (x^3 + 16x^5)dx = \frac{35}{12}.$$

(iii) আবার, $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ হওয়ার জন্য

$$d\mathbf{r}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j},$$

এবং

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r}=x^3dx+y^2dy.$$

সুতরাং,

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)}\mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(x^3dx+y^2dy)=\frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{1}+\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{2}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{8}{3}=\frac{35}{12}.$$

লক্ষ্য করার বিষয়, যে এখানে

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r}=x^3dx+y^2dy=d\left(\frac{x^4}{4}+\frac{y^3}{3}\right)=\text{একটি সম্পূর্ণ অবকল।}$$

কাজেই $\mathbf{F}$ বলটি সংরক্ষী।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : যে পথ C বরাবর পথ-সমাকলটি নির্ণয় করতে হবে, তা সাধারণতঃ সমাকল চিহ্নের নিচে লেখার রীতি আছে। যেমন, বক্র C বরাবর O থেকে A বিন্দু পর্যন্ত ($\mathbf{F}.d\mathbf{r}$) রাশিটির পথ-সমাকল বুঝাতে আমরা লিখতে পারি

$$\int_{0\,(C)}^{A}(\mathbf{F}.d\mathbf{r}) \text{ বা শুধু } \int_{C}(\mathbf{F}.d\mathbf{r}).$$

C বক্রটি একটি বদ্ধবক্র হলে $\oint(\mathbf{F}.d\mathbf{r})$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। উপরন্তু বদ্ধবক্র C যদি বামাবর্তে অতিক্রম করা হয় তবে, আমরা লিখতে পারি

$$\oint_{C}(\mathbf{F}.d\mathbf{r}).$$

8. বল $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ হলে, O(0,0) থেকে A(1,2) পর্যন্ত $y=2x^2$ বক্র বরাবর

$$\int_{0}^{A}(\mathbf{F}.d\mathbf{r})$$

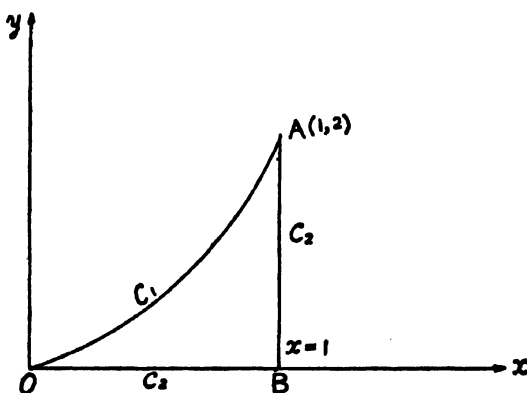
পথ-সমাকলটির মান নির্ণয় করতে হবে।

এক্ষেত্রে,

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r}=(y^2\mathbf{i}-x\mathbf{j}).(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j})=y^2dx-xdy$$

কাজেই, $y=2x^2$ বক্র বরাবর (1·14 চিত্রে পথ C_1)

$$\int_0^A (\mathbf{F}.d\mathbf{r})=\int_0^A (y^2dx-xdy)=\int_{x=0}^1 (4x^4dx-x.4xdx)$$

$$=\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{8}{15}.$$

চিত্র 1·14—পথ-সমাকল

উপরের সমাকলটির মান একটু অন্যপথে নির্ণয় করা যাক। ধরা যাক, O থেকে A বিন্দু পর্যন্ত OBA পথে (চিত্র 1·14) গমন করা হ'ল, যেখানে OB রেখায় $y=0$ এবং AB রেখায় $x=1$. এই পথটিকে C_2 দ্বারা নির্দেশ করা হবে। তাহলে,

$$\int_0^A (\mathbf{F}.d\mathbf{r})=\int_{0 \atop C_2}^B (\mathbf{F}.d\mathbf{r})+\int_{B \atop C_2}^A (\mathbf{F}.d\mathbf{r})$$

কিন্তু OB রেখা বরাবর $y=0$, $\mathbf{F}=-x\mathbf{j}$ এবং $d\mathbf{r}=dx.\mathbf{i}$. আবার, BA রেখা বরাবর $x=1$, $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}-\mathbf{j}$, এবং $d\mathbf{r}=dy\mathbf{j}$.

সুতরাং

$$\int_0^A (\mathbf{F}.d\mathbf{r}) = \int_0^B (-x\mathbf{j}).(dx\mathbf{i}) + \int_B^A (y^2\mathbf{i}-\mathbf{j}).(dy\mathbf{j})$$

$$= \int_B^A (-dy) = -y \Big|_{y=0}^{2} = -2.$$

এখানে দেখা যাচ্ছে

$$\int_{C_1} (\mathbf{F}.d\mathbf{r}) \neq \int_{C_2} (\mathbf{F}.d\mathbf{r})$$

অতএব **F** বলটি সংরক্ষী নয়।

প্রশ্নমালা 1(গ)

1. সরলরেখায় ঘণ্টায় 60 কিলোমিটার বেগে গমনরত 1,140 কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি মোটরগাড়ির ভরবেগ নির্ণয় কর।

2. 12 গ্রাম একটি ভরের উপর উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিশায় 846dyn একটি বল ক্রিয়া করছে। মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণ g-র মান 980 cm/sec^2 ধ'রে, ভরটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

3. 10 কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি ব্যাগ হাতে নিয়ে এক ব্যক্তি একটি বারান্দা থেকে নিচে লাফিয়ে পড়লে, শূন্যে-থাকাকালে ব্যাগটির দরুন লোকটির হাতে কি পরিমাণ বল ক্রিয়া করবে ?

4. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার উপর 300dyn একটি বল ক্রিয়া ক'রে 1 মিনিটে কণাটির বেগ 200 m/sec থেকে বাড়িয়ে 230 m/sec করলে, কণাটির ভর নির্ণয় কর।

5. পরিমাপের কোন পদ্ধতিতে ভরের একক যদি কিলোগ্রাম এবং দৈর্ঘ্যের একক 102 সেণ্টিমিটার এবং সময়ের একক সেকেণ্ড হয়, তবে বলের একককে নিউটনে প্রকাশ কর।

6. সুষমবেগে সরলরেখায় গমনরত একটি রেলগাড়ীর ইঞ্জিন 1 ton wt. বল প্রয়োগ করছে। গাড়িটির গতিতে বিভিন্ন কারণে যে বাধা সৃষ্টি হচ্ছে তার পরিমাণ প্রতি টন ভরের জন্য 16 lb. wt. হলে গাড়িটির ভর নির্ণয় কর।

7. একটি হালকা সরু রজ্জুর দুই প্রান্তে দুটি ভর M_1 এবং M_2 বাঁধা আছে। রজ্জুটিকে একটি মসৃণ টেবিলের দুই সমান্তরাল ধারের আড়াআড়ি রাখা হ'ল, যাতে দুই প্রান্তের ভর-দুটি ঝুলতে থাকে। টেবিলের উপর রজ্জুটির যে অংশ অবস্থিত সেখানে আরেকটি ভর m বাঁধা হলে, দেখাও যে মুক্ত অবস্থায় রজ্জুটির নিম্নাভিমুখী ত্বরণের মান

$$\frac{(M_1 - M_2)g}{M_1 + M_2 + m}.$$

8. একটি চলমান লিফ্‌টে স্প্রিং-তুলায় W_1 ওজনবিশিষ্ট একটি বস্তুর ওজন যদি W_2 দেখা যায়, তবে ওজন করার সময় লিফ্‌টের ত্বরণ নির্ণয় কর।

9. m ভরবিশিষ্ট গ্যাসপূর্ণ একটি বেলুন আকাশে নিম্নে অবতরণ করছে। বেলুনটির নিম্নাভিমুখী ত্বরণ f. বেলুন থেকে কতখানি গ্যাস নিচের দিকে নির্গত হলে বেলুনটির ত্বরণ ঊর্ধ্বাভিমুখে f' হবে, নির্ণয় কর। বায়ুর ঘর্ষণ-জনিত প্রতিরোধ অবজ্ঞেয়।

10. দেখাও যে

$$\oint_C \mathbf{r}.d\mathbf{r} = 0,$$

যেখানে C একটি বদ্ধবক্র।

11. দেখাও যে কেন্দ্রীয় বল

$$\mathbf{F} = -F(r)\hat{\mathbf{r}}$$

এর ক্ষেত্র সংরক্ষী, যেখানে $\mathbf{r}$-এর দিশায় একক ভেক্টর হ'ল $\hat{\mathbf{r}}$.

12. বল $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$ হলে

$$\int_0^A \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

সমাকলটির মান নির্ণয় কর, যেখানে O বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1) এবং $y = x^3$ বক্র বরাবর পথ-সমাকল নিরূপণ করতে হবে। দেখাও যে বলটি সংরক্ষী।

13. বল $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ হলে, $y=x^2$ বক্র বরাবর O(0, 0) থেকে A(2, 2) পর্যন্ত

$$\int_0^A \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

পথ-সমাকলটির মান নির্ণয় কর। দেখাও যে বলটি সংরক্ষী নয়।

14. দেখাও যে মূলবিন্দু বাদে ব্যস্ত-বর্গ বল

$$\mathbf{F}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

এর ক্ষেত্র সংরক্ষী।

15. বল $\mathbf{F}=(y^2-x^2)\mathbf{i}+3xy\mathbf{j}$ হলে O(0, 0) থেকে $A(a, b)$ বিন্দু পর্যন্ত ঋজুরেখ পথ OBA বরাবর

$$\int_0^A \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

সমাকলটির মান নির্ণয় কর, যেখানে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$. পুনশ্চ, ঋজুরেখ পথ ODA বরাবর উপরোক্ত সমাকলটির মান নির্ণয় কর, যেখানে D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, b)$. বলটি কি সংরক্ষী ?

16. ভূ-পৃষ্ঠে স্থৈতিক শক্তির মান শূন্য ধ'রে ভূ-পৃষ্ঠের 1 km ঊর্ধ্বে 2 kg. ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর স্থৈতিক শক্তির মান আর্গে প্রকাশ কর। পুনশ্চ, অসীম দূরত্বে স্থৈতিক শক্তির মান শূন্য ধরলে উপরোক্ত মান কত আসে ?

17. পৃথিবী সাপেক্ষে চন্দ্রের গতীয় শক্তির মান নির্ণয় কর।

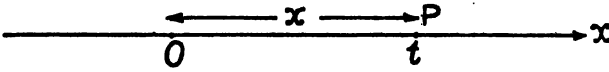
18. মোটামুটি হিসাবে পৃথিবী থেকে চন্দ্রের দূরত্ব ভূ-ব্যাসার্ধের 60 গুণ। চন্দ্র বৃত্তপথে 27 দিন 7 ঘণ্টা 43 মিনিটে একবার পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করে ধ'রে নিয়ে চন্দ্রের অভিকেন্দ্র ত্বরণের মান নির্ণয় কর, এবং নিউটনের মহাকর্ষ নিয়ম অনুযায়ী এই ত্বরণের যে মান পাওয়া যায়, তার সঙ্গে এই মান তুলনা কর।

উত্তরমালা (1গ)

1. 19×10^{8} kg. cm/sec গতির দিশায়
2. $909{\cdot}5$ cm/sec^{2} উল্লম্ব নিম্ন দিশায়
3. বলের মান শূন্য।
4. 6 gm.
5. $1{\cdot}02$ N.
6. 140 টন
8. $g(W_1 - W_2)/W_1$
9. $m(f + f')/(g + f')$
12. $\frac{7}{12}$
16. $19{\cdot}6 \times 10^{10}$ ergs.

দ্বিতীয় অধ্যায়

ঋজুরেখ গতি

2·1. সুষম ত্বরণ-বিশিষ্ট গতি—পূর্বের অধ্যায়ে বিভিন্ন অক্ষতন্ত্রে বেগ ও ত্বরণের মান নির্ধারণ করা হয়েছে এবং গতির নিয়মাবলী আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান অধ্যায়ে কণার ঋজুরেখ গতি আলোচিত হবে, অর্থাৎ এখানে ধরা হবে আলোচ্য কণার গতিপথ একটি সরলরেখা। সরলরেখাটির উপর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু O-কে মূলবিন্দু এবং সরলরেখাটিকে x-অক্ষরেখা ধরা হ'ল (চিত্র 2.1)। কোন নির্দিষ্ট সময় t-তে কণাটির অবস্থিতি P এবং $\mathrm{OP}=x$ ধরা হ'ল। এখন প্রদত্ত কণাটির গতি নির্ধারণ করতে হবে,

চিত্র 2·1

ঋজুরেখ গতি

অর্থাৎ সময় সাপেক্ষে কণাটির অবস্থিতি ও বেগ নির্ধারণ করতে হবে। বর্তমান অনুচ্ছেদে সুষম ত্বরণ-বিশিষ্ট ঋজুরেখ গতি আলোচনা করা হবে। **সময় বা অবস্থিতির সঙ্গে কণার ত্বরণের পরিবর্তন না ঘটলে, কণার গতিকে সুষম ত্বরণ-বিশিষ্ট গতি** বলা হয়। এখানে ধরা হবে, গতির সঙ্গে আলোচ্য কণাটির ভর m-এর কোন পরিবর্তন হয় না। কণাটির উপর ক্রিয়াশীল মোট বল F হলে, ঐ বলও x-দিশা বরাবর ক্রিয়া করবে। সুতরাং নিউটনের গতির দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী "ভর × ত্বরণ = বল" থেকে কণাটির গতীয় সমীকরণ পাওয়া যায়

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{F}. \tag{1}$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f, \tag{2a}$$

যেখানে

$$\frac{\mathrm{F}}{m}=f. \tag{2b}$$

যেহেতু স্বীকার্য অনুযায়ী কণাটির ভর এবং ত্বরণ অচর রাশি, কাজেই (1) থেকে দেখা যায় যে ক্রিয়াশীল মোট বল F একটি অচর রাশি। [(2b) থেকে দেখা যায় যে f একটি অচর রাশি)]। কণাটির বেগ ও ত্বরণ x-বৃদ্ধির দিকে পরিমাপ করা হয়।

লক্ষ্য করার বিষয় যে, কণাটির ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}$ স্বীকার্য অনুযায়ী একটি অচর রাশি ব'লে, ক্রিয়াশীল বল সম্বন্ধে কোনরূপ আলোচনা না ক'রেই (2a) সমীকরণটি সরাসরি লেখা যেত। উপরের আলোচনায় গতির দ্বিতীয় নিয়ম প্রয়োগ করাতে ক্রিয়াশীল বল সম্বন্ধে একটু বাড়তি তথ্য পাওয়া গেল, এবং তা হ'ল, কণাটির ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}$ ক্রিয়াশীল মোট বলের সঙ্গে ভরের অনুপাত f-এর সমান।

(2a) একটি দ্বিতীয় ক্রমের সাধারণ রৈখিক অবকল-সমীকরণ। সমীকরণটি সমাধান করলে সময় সাপেক্ষে কণাটির অবস্থিতি ও বেগ নির্ধারণ করা যাবে। সময় সাপেক্ষে (2a)-এর সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$v=\frac{dx}{dt}=ft+c_1, \tag{3a}$$

যেখানে c_1 সমাকলন-জনিত অচর। আদি মুহূর্তে $t=0$ ধরলে, কণাটি যদি ঐ সময়ে O বিন্দুতে x-বৃদ্ধির দিশায় u বেগে গমনরত থাকে, তবে আদি দশা হ'ল

$$t=0,\ x=0,\ v=u. \tag{3b}$$

(3b) অনুযায়ী আদি দশা (3a)-তে বসিয়ে c_1-এর মান পাওয়া যায়ঃ

$$u=0+c_1.$$

c_1-এর এই মান (3a)-র ডানদিকে বসিয়ে বেগের মান আসে

$$v=\frac{dx}{dt}=ft+u \tag{4}$$

অর্থাৎ বেগের বৃদ্ধি সময়ান্তর ও ত্বরণের গুণফলের সমান। সময় সাপেক্ষে পুনরায় সমাকলন দ্বারা দেখা যায়

$$x=\tfrac{1}{2}ft^2+ut+c_2 \tag{5a}$$

যেখানে c_2 সমাকলন-জনিত অচর। (3b) অনুযায়ী আদি দশা (5a)-তে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$0=0+0+c_2\,; \tag{5b}$$

সুতরাং (5a) থেকে কণাটির অবস্থিতি হ'ল

$$x=ut+\tfrac{1}{2}ft^2. \tag{6}$$

আবার (4) এবং (6)-এর মধ্যে সময় t-কে অপনয়ন করলে, এবং সরল করলে অবস্থিতি সাপেক্ষে বেগের মান পাওয়া যায়ঃ

$$v^2=u^2+2fx. \tag{7}$$

(7) সম্বন্ধটি কিন্তু (2a) থেকে একটু অন্যভাবে সরাসরি সমাকলন দ্বারা নিম্নলিখিত রূপে পাওয়া সম্ভব। এজন্য প্রথমেই দেখি যে

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}v=\frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt}=v\,\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}\,(\tfrac{1}{2}v^2) \tag{8}$$

কাজেই (2a) সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)=f.$$

x-সাপেক্ষে সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}v^2=fx+c_3, \tag{9a}$$

যেখানে c_3 সমাকলন জনিত অচর। (9a)-তে আদি দশা (3b) বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}u^2=0+c_3. \tag{9b}$$

c_3-এর এই মান (9a)-তে বসালে, (7) সম্বন্ধটি ফিরে পাওয়া যায়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি আদি সময়ে কণাটির অবস্থিতি মূলবিন্দু না হয়ে $x=a$ হয় তবে (3b)-এর স্থলে পরিবর্তিত আদি দশা হ'ল

$$t=0,\; x=a,\; v=u. \tag{10}$$

সেক্ষেত্রে (6) সমীকরণের স্থলে আসে

$$x=a+ut+\tfrac{1}{2}ft^2. \tag{11}$$

2.2. সাধারণ ঋজুরেখ গতি, বলের আবেগ ও ঘাতবল। গতীয় শক্তি, স্থৈতিক শক্তি ও শক্তি-সংরক্ষণ—পূর্বের অনুচ্ছেদে কণাটির ত্বরণ সুষম ধরা হয়েছে। কিন্তু সাধারণ ক্ষেত্রে কণাটির ত্বরণ সুষম নাও হতে পারে। সাধারণ বলের ক্রিয়ায় কণার ঋজুরেখ গতি বর্তমান অনুচ্ছেদের আলোচ্য বিষয়। কণাটির উপর ক্রিয়াশীল মোট বল F এক্ষেত্রে x-অক্ষরেখা বরাবর ক্রিয়া করছে, ধরা হ'ল (চিত্র 2·1)। গতির সঙ্গে কণাটির ভর m এর পরিবর্তন ঘটছে না ধ'রে নিয়ে, নিউটনের গতির দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{dv}{dt}\equiv m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{F}. \qquad \text{(i)}$$

ক্রিয়াশীল বল F শুধুমাত্র সময় t-র অপেক্ষক বা শুধুমাত্র অবস্থিতির অপেক্ষক বা শুধুমাত্র বেগের অপেক্ষক ধরে নিয়ে, এই তিনটি ক্ষেত্রে (i) সমীকরণের নিম্নরূপে সমাকলন করা যায় :

ক্ষেত্র (ক) : F = F(t)—এক্ষেত্রে উভয়পক্ষকে dt দ্বারা গুণ করলে দাঁড়ায়

$$mdv=\mathrm{F}(t)\,dt.$$

সময় সাপেক্ষে সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$m(v-v_0)=\int_{t=t_0}^{t}\mathrm{F}(t)\,dt, \qquad (12)$$

যেখানে আদি সময় $t=t_0$-তে বেগের মান $v=v_0$. কোন সময়াভ্যন্তরে কণার ভরবেগ পরিবর্তনের মানকে ক্রিয়াশীল **বলের আবেগ** বলে, এবং I চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি বলে, আবেগও একটি ভেক্টর রাশি। (12) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে

$$\mathrm{I}(t)=mv-mv_0=\int_{t_0}^{t}\mathrm{F}(t)\,dt \qquad (13)$$

(13) সমীকরণ থেকে দেখা যায় t_0 থেকে t সময়ের মধ্যে ক্রিয়াশীল বলের আবেগ I, ঐ সময়ান্তরে প্রযুক্ত বলের সমাকলনের সমান। আবেগ I সময় t-এর অপেক্ষক।

যদি ক্রিয়াশীল বল F এত বৃহৎ হতে থাকে যে সময়ান্তর $(t-t_0)$ অতিক্ষুদ্র হলেও বলের আবেগ সসীম থাকে, তবে সেই বলকে **ঘাতবল** বলে।

সাধারণ অর্থে ঘাতবলকে সময়ের ফাংশন-রূপে ভাবা চলে না। আধুনিক বিশ্লেষণ তত্ত্ব অনুযায়ী ঘাতবল একটি **সামান্যীকৃত ফাংশন**-এর উদাহরণ। ভরবেগ পরিবর্তনের মান থেকে ঘাতবল সম্বন্ধে ধারণা করা যায়।

যেহেতু $v=\dfrac{dx}{dt}$ এবং v_0 একটি অচর রাশি, সময় সাপেক্ষে (13) সমীকরণের সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$x-x_0=v_0(t-t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \mathrm{I}(t)\,dt, \tag{14}$$

যেখানে আদি সময় $t=t_0$-তে অবস্থিতি হ'ল $x=x_0$. এখানে (13) ও (14)-র দ্বারা কণাটির বেগ ও অবস্থিতি সময়ের ফাংশন-রূপে প্রকাশ করা হয়েছে।

ক্ষেত্র (খ) : $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$—এক্ষেত্রে লক্ষ্য করা দরকার যে ভর অচর ব'লে ত্বরণকে (8) অনুযায়ী নিম্নরূপে লেখা যায় :

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}=m\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\,v^2\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)$$

সুতরাং (1) এক্ষেত্রে দাঁড়ায়

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)=\mathrm{F}(x).$$

উভয়পক্ষকে dx দ্বারা গুণ ক'রে পাওয়া যায়

$$d(\tfrac{1}{2}mv^2)=\mathrm{F}(x)\,dx. \tag{15}$$

কণাটির আদি অবস্থিতি $x=x_0$-তে বেগ $v=v_0$ হলে (15)-এর সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^{\,2}=\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx \tag{16}$$

পূর্বের অধ্যায়ে বলা হয়েছে, $\frac{1}{2}mv^2$ রাশিটিকে কণাটির **গতীয় শক্তি** বলা হয়। আবার কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল $\mathrm{F}(x)$ এবং বলের দিশায় কণাটির সরণ dx ব'লে $\mathrm{F}(x)\,dx$ কণার উপর dx সরণের জন্য ঐ বলের দ্বারা সাধিত কর্ম বুঝায়। কাজেই (16) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে, আদি দশা থেকে x অবস্থিতি পর্যন্ত কণাটির গতীয় শক্তির পরিবর্তন ঐ সরণের জন্য $\mathrm{F}(x)$ দ্বারা সাধিত কর্মের সমান।

গতীয় শক্তিকে আমরা K চিহ্ন দ্বারা সূচিত করব। তাহলে, সংজ্ঞানুসারে

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{17}$$

গতীয় শক্তি ছাড়াও আর এক রকমের শক্তি থাকতে পারে, যার নাম স্থৈতিক শক্তি। স্থৈতিক শক্তিকে আমরা পূর্বের ন্যায় U-চিহ্ন দ্বারা সূচিত করব। স্থৈতিক শক্তির সংজ্ঞা হ'ল, 1·6 অনুচ্ছেদ অনুযায়ী

$$dU = -F(x)\,dx. \tag{18}$$

লক্ষ্য করার বিষয়, যে সংজ্ঞা (18) থেকে সমাকলন দ্বারা স্থৈতিক শক্তি U নির্ণয় করলে, সমাকলন-জনিত একটি অচর আসবে, যার মান সম্বন্ধে উপরোক্ত সংজ্ঞায় কিছু বলা হয়নি, এবং এর মান নির্ণয়ের জন্য কোন উপযুক্ত আদি দশা বেছে নিতে হবে। স্থৈতিক শক্তি অবস্থিতি x-এর ফাংশন।

এখন (17) এবং (18) সংজ্ঞাদ্বয় (15) সমীকরণে বসালে দাঁড়ায়

$$dK = -dU.$$

পক্ষান্তর ও সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$K + U = \text{ধ্রুবক} = C, \tag{19}$$

যেখানে C-কে অচর শক্তি বা কণার সমগ্র শক্তি ভাবা যায়। (19) থেকে দেখা যাচ্ছে, **যে কোন অবস্থিতিতে গতীয় শক্তি এবং স্থৈতিক শক্তির যোগফল একটি ধ্রুবক।** এই ফলকে **শক্তি সংরক্ষণের নীতি** বলা হয়। শক্তি সংরক্ষণের নীতি বলবিদ্যায় তথা গাণিতিক পদার্থবিদ্যায় বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করেছে।

পক্ষান্তর দ্বারা (19) থেকে পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = C - U(x),$$

অর্থাৎ $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\{C - U(x)\}.$$

বর্গমূল নিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{dx}{dt} = \pm\left[\frac{2}{m}\left\{C - U(x)\right\}\right]^{1/2}. \tag{20}$$

কণাটি যদি x-বৃদ্ধি অভিমুখে গমন করে, তবে এখানে ধনাত্মক চিহ্নটি গ্রহণ

করা হবে—অন্যথায় যদি x-হ্রাস অভিমুখে গমন করে তবে ঋণাত্মক চিহ্নটি গ্রহণ করতে হবে। সমাকলনের উদ্দেশ্যে (20) নিম্নরূপে লেখা হ'ল

$$\pm\left[\frac{2}{m}\{C-U(x)\}\right]^{-1/2}dx=dt.$$

তাহলে, আদি সময় $t=t_0$-তে অবস্থিতি $x=x_0$ ধ'রে সমাকলন দ্বারা দাঁড়ায়

$$\pm\int_{x_0}^{x}\left[\frac{2}{m}\{C-U(x)\}\right]^{-1/2}dx=t-t_0, \tag{21}$$

যেখানে দ্ব্যর্থ চিহ্নের মধ্যে উপযুক্তটি স্থির করার উপায় উপরে বর্ণিত হয়েছে।

ক্ষেত্র (গ) : $F=F(v)$—এক্ষেত্রে (1) হ'ল

$$m\frac{dv}{dt}=F(v),$$

যাকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$dt=m\frac{dv}{F(v)}$$

আদি সময় $t=t_0$-তে বেগ $v=v_0$ ব'লে, সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$t-t_0=m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}=F_1(v)\ (\text{ধরি}). \tag{22}$$

এই সমীকরণের দ্বারা সময় t-কে বেগ v-এর অপেক্ষক-রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। বিপরীতভাবে, এই সমীকরণ v-কে t-এর ফাংশন-রূপেও প্রকাশ করছে। বিপরীত রূপ যদি $v=F_2(v)$ হয়, তাহলে

$$\frac{dx}{dt}=F_2(t)$$

থেকে সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$x-x_0=\int_{t_0}^{t}F_2(t)dt, \tag{23}$$

যেখানে আদি সময় $t=t_0$-তে আদি অবস্থিতি $x=x_0$ ধরা হয়েছে।

2·3. ভূ-পৃষ্ঠের সন্নিকটে অবাধ পতন—ভূ-পৃষ্ঠের সন্নিকটে, কিছুটা উঁচু থেকে শূন্যে একটুকরো পাথরকে বা একটা কণাকে ছেড়ে দেওয়া হ'ল—কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় অবস্থিত বিন্দু A থেকে (চিত্র 2·2) কণাটিকে ছেড়ে দেওয়া হ'ল। A থেকে ঊর্ধ্ব দিশায় x-অক্ষরেখা নেওয়া হ'ল এবং এই রেখা ভূ-পৃষ্ঠকে O বিন্দুতে ছেদ করলে, O-কে মূল বিন্দু ধরা হল। কণাটির ভর m হলে, মাধ্যাকর্ষণ হেতু কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল

$$F = -mg \tag{24}$$

যেখানে মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ g দ্বারা সূচিত হয়েছে। বল F ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত মূলবিন্দু O অভিমুখে ক্রিয়া করে ব'লে, (24) সমীকরণে ঋণাত্মক চিহ্নটি দেওয়া হয়েছে। (24) সমীকরণে কণাটির ভরের যে মান m ব্যবহৃত হয়েছে, তাকে **মহাকর্ষীয় ভর** বলে। আর নিউটনের গতির দ্বিতীয় নিয়ম (1·49a) সমীকরণে ব্যবহৃত কণাটির ভরকে **জড়ত্বীয় ভর** বলে। আমরা ধ'রে নিচ্ছি কণাটির জড়ত্বীয় ভর এবং মহাকর্ষীয় ভর পরস্পর অভিন্ন।

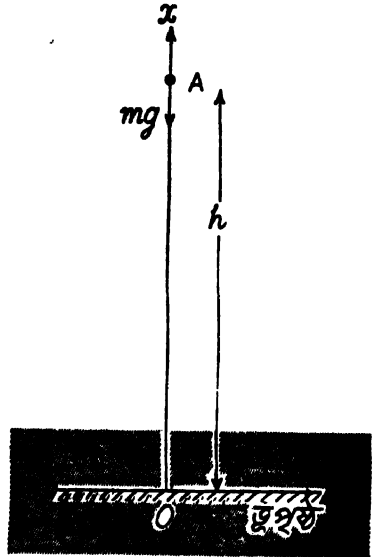
চিত্র 2·2—ভূ-পৃষ্ঠের সন্নিকটে অবাধ পতন

বল F-এর মান (24) থেকে (1) এ বসিয়ে এবং উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে কণাটির গতীয় সমীকরণ পাওয়া যায়

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -g. \tag{25}$$

মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণ g একটি অচর রাশি ব'লে (ভূ-পৃষ্ঠ থেকে অতিদূরে g অচর থাকে না) প্রথম অনুচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতিতে এই সমীকরণের সমাধান পাওয়া যাবে।

সময় সাপেক্ষে (25)-এর সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$v = -gt + c_1,$$

যেখানে c_1 সমাকলন-জনিত অচর। আদি সময় $t=0$-তে কণাটির অবস্থিতি $x=h$ এবং $v=0$ ব'লে

$$0=0+c_1.$$

কাজেই, $$v=\frac{dx}{dt}=-gt \tag{26}$$

সময় সাপেক্ষে পুনরায় সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$x=-\tfrac{1}{2}gt^2+c_2.$$

প্রদত্ত আদি দশা অনুযায়ী

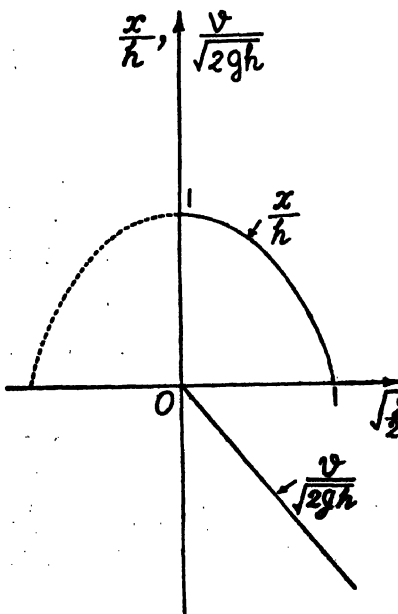
$$h=0+c_2.$$

সুতরাং $$x=h-\tfrac{1}{2}gt^2. \tag{27}$$

এখান থেকে দেখা যাচ্ছে ভূপাতিত ($x=0$) হতে কণাটির যে সময় লাগে, তা নির্ণয়ের সমীকরণ হ'ল

$$h-\tfrac{1}{2}gt^2=0,$$

অর্থাৎ ঋণাত্মক মানটি বাদ দিলে $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

চিত্র 2·3—ভূ-পৃষ্ঠের সন্নিকটে অবাধ পতন। সময় সাপেক্ষে অবস্থিতি ও বেগ

এখান থেকে দেখা যাচ্ছে, ভূপাতিত হতে কণাটির যে সময়ের প্রয়োজন, তা কণাটির ভরের উপর নির্ভর করে না। লক্ষ্য করা দরকার যে,

$$x'=\frac{x}{h},$$

$$t'=\sqrt{\frac{g}{2h}}\,t, \tag{28a}$$

$$v'=\frac{v}{\sqrt{2gh}}$$

ধরলে (26) এবং (27)-এর পরিবর্তিত রূপ হয় যথাক্রমে

$$\left.\begin{aligned} v'&=-t' \\ \text{এবং}\quad x'&=1-t'^2. \end{aligned}\right\} \tag{28b}$$

এখানে g এবং h অচরদ্বয়কে

প্রকাশ্যে দেখা যাচ্ছে না, যা খুব সুবিধাজনক। বলবিদ্যার বিভিন্ন ক্ষেত্রে সমাধানের এরূপ অচর-বর্জিত রূপ বিশেষ সমাদর লাভ করে। [(28b) সমীকরণদ্বয়কে 2·3 চিত্রে দেখানো হয়েছে।] সময় সাপেক্ষে অবস্থিতি একটি অধিবৃত্ত, এবং সময় সাপেক্ষে বেগ একটি সরলরেখা।

আবার (26) এবং (27)-এর মধ্যে t অপনয়ন করলে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়,—

$$x = h - \frac{v^2}{2g}. \tag{29}$$

এখান থেকে দেখা যাচ্ছে, ভূপাতিত হবার সময় কণাটির বেগ (ঋণাত্মক মানটি বাদ দিলে),

$$v = \sqrt{2gh} \tag{30}$$

এই মানও কণার ভরের উপর নির্ভরশীল নয়।

দ্বিতীয় অনুচ্ছেদে বর্ণিত (খ) ক্ষেত্রের ন্যায় শক্তি-সংরক্ষণ নীতি প্রয়োগ করেও উপরের সমস্যাটির সমাধান করা যায়। এক্ষেত্রে,

$$dU = -Fdx = mgdx, \text{ এবং } K = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

কাজেই, শক্তি-সংরক্ষণ নীতি (19) থেকে পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgx = \text{ধ্রুবক} = C. \tag{31}$$

আদি দশা $x = h$, $v = 0$, বসিয়ে (31) থেকে পাওয়া যায়

$$0 + mgh = C.$$

সুতরাং শক্তি-সংরক্ষণ নীতি দাঁড়ায়

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgx = mgh. \tag{32}$$

ভূপাতিত ($x = 0$) হবার সময়, বেগের মান পূর্বের ন্যায় আসে

$$v = \sqrt{2gh}.$$

অনেকক্ষেত্রে, শক্তি-সংরক্ষণ নীতির প্রয়োগে সমস্যার সমাধান সহজে পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. সুষম ত্বরণ f-বিশিষ্ট, সরলরেখায় গমনরত একটি কণা t-তম সেকেণ্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে, তার মান নির্ণয় করতে হবে।

ইতিপূর্বে, (6) সমীকরণে আমরা দেখেছি t-সেকেণ্ডে কণাটির অবস্থিতি x_t-এর মান

$$x_t = ut + \tfrac{1}{2}ft^2,$$

যেখানে আদি সময় $t=0$-তে বেগ u. কাজেই $(t-1)$ সেকেণ্ডে অবস্থিতি x_{t-1} হ'ল

$$x_{t-1} = u(t-1) + \tfrac{1}{2}f(t-1)^2.$$

সুতরাং,

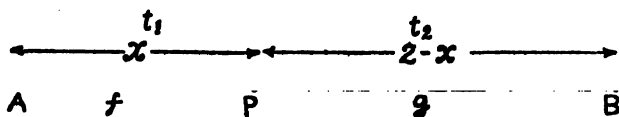
t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= x_t - x_{t-1} = u + \tfrac{1}{2}f(2t-1).$

ভূ-পৃষ্ঠের সন্নিকটে অবাধ পতনের ক্ষেত্রে $f=g$, এবং $u=0$. কাজেই, এক্ষেত্রে

t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \tfrac{1}{2}g(2t-1).$

উদাহরণ 2. সরলরেখায় গমনকারী একটি রেলগাড়ী পরপর দুটি স্টেশনে থামে। স্টেশনদ্বয়ের অন্তর্বর্তী দূরত্ব 2 কিলোমিটার এবং এই দূরত্ব রেলগাড়ীটি 4 মিনিট সময়ে অতিক্রম করে। গাড়ীটি যদি প্রথমে সুষম ত্বরণ f-এ চলে এবং পরে সুষম মন্দন g-তে চলে, তবে দেখাতে হবে

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = 4.$$

(দূরত্বের একক কিলোমিটার এবং সময়ের একক মিনিট ধরতে হবে)।

t_1 t_2
←—— x ——→←—— $2-x$ ——→
A f P g B

ধরা যাক, A, B স্টেশন-দ্বয়ের দূরত্ব 2 কিলোমিটার এবং ট্রেনটি AP $= x$ কিলোমিটার দূরত্ব সুষম ত্বরণ f-এ গমন করে এবং PB $= 2-x$ কিলোমিটার দূরত্ব সুষম মন্দন g-তে চলে। AP এবং PB দূরত্ব অতিক্রম করতে ট্রেনটির যথাক্রমে t_1 এবং t_2 মিনিট লাগে। তাহলে, স্বীকার্য অনুযায়ী সময়ের একক মিনিট ধ'রে,

$$t_1 + t_2 = 4 \qquad \text{(i)}$$

A এবং B বিন্দুতে বেগ শূন্য লক্ষ্য ক'রে, P বিন্দুতে বেগের পরিমাণ আসে

$$v = ft_1$$

এবং দূরত্ব

$$x=\frac{1}{2}ft_1^2. \qquad \text{(ii)}$$

আবার, দূরত্ব PB এবং P বিন্দুতে ft_1 বেগের জন্য সমীকরণ আসে

$$2-x=ft_1.t_2-\frac{1}{2}gt_2^2 \qquad \text{(iii)}$$

এবং

$$0=ft_1-gt_2. \qquad \text{(iv)}$$

(iv) থেকে আসে

$$t_2=\frac{f}{g}t_1. \qquad \text{(v)}$$

এই মান (iii)-এ বসিয়ে এবং (ii) থেকে x-এর মান (iii)-এ বসিয়ে সরল ক'রে আসে

$$2=\frac{ft_1^2}{2}\left(1+\frac{f}{g}\right). \qquad \text{(vi)}$$

(i) এবং (v) থেকে t_1-এর মান আসে

$$t_1=\frac{4g}{f+g}.$$

এই মান (vi) সমীকরণে বসিয়ে সরল ক'রে পাওয়া যায়

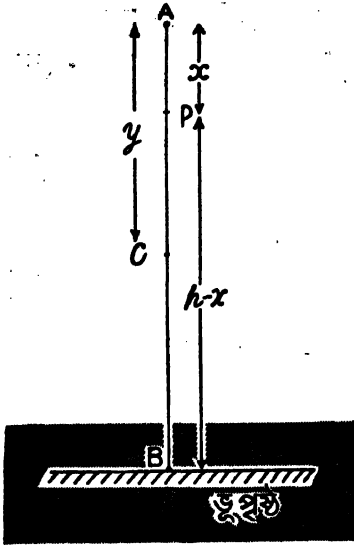
$$\frac{1}{f}+\frac{1}{g}=4.$$

উদাহরণ 3. একটি স্তম্ভের শীর্ষদেশ থেকে পতিত একটি কণা x মিটার নিচে পড়ে যাওয়ার পর শীর্ষদেশ থেকে y মিটার নিচে অবস্থিত একস্থান থেকে আর একটি কণাকে শূন্যে ছেড়ে দেওয়া হ'ল। কণাদ্বয় একসঙ্গে ভূপাতিত হলে, দেখাতে হবে যে স্তম্ভটির দৈর্ঘ্য

$$\frac{(x+y)^2}{4x} \text{ মিটার।}$$

ধরা যাক, AB স্তম্ভটির উচ্চতা h মিটার। x-মিটার নিচে, P বিন্দু পর্যন্ত অবতরণ করতে ধরা যাক t_1 সময় লাগে। ঐ সময়ে C বিন্দু থেকে অপর কণাটি ছেড়ে দেওয়া হ'ল, যেখানে AC $=y$. অতঃপর, ভূপাতিত হতে কণাদ্বয়ের t_2 সময় লাগে, ধরা হ'ল।

প্রথম কণাটির আদি বেগ শূন্য ব'লে

$$x = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \quad \text{(i)}$$

এবং P বিন্দুতে কণাটির বেগ

$$v = gt_1.$$

কণাটি t_2 সময়ে PB দূরত্ব অতিক্রম করে ব'লে

$$PB = h - x$$
$$= gt_1.t_2 + \tfrac{1}{2}gt_2^2. \quad \text{(ii)}$$

আবার দ্বিতীয় কণার আদি বেগ শূন্য এবং CB দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় লাগে t_2. কাজেই,

$$h - y = \tfrac{1}{2}gt_2^2. \quad \text{(iii)}$$

এই মান (ii) সমীকরণে বসিয়ে, সরল ক'রে আসে

$$y - x = gt_1.t_2$$

(i) থেকে t_1-এর মান এখানে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$t_2 = \frac{y-x}{\sqrt{2gx}}.$$

এই মান (iii)-এ বসিয়ে সরল ক'রে স্তম্ভটির উচ্চতা আসে

$$h = y + \tfrac{1}{2}g.\left\{\frac{y-x}{\sqrt{2gx}}\right\}^2 = \frac{(x+y)^2}{4x} \text{ মিটার।}$$

প্রশ্নমালা 2(ক)

1. সরলরেখায় সুষম ত্বরণে একটি কণা, স্থির অবস্থা থেকে ষষ্ঠ সেকেণ্ডে 55 cm পথ অতিক্রম করলে, অষ্টম সেকেণ্ডে কণাটি কতটা পথ অতিক্রম করবে নির্ণয় কর।

2. সুষম ত্বরণে সরলরেখায় গমনরত একটি কণা, গতি সুরু হওয়ার একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেণ্ডে যথাক্রমে 720 cm এবং 960 cm পথ অতিক্রম করলে কণাটির আদি বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

3. কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করার সময়, সুষম ত্বরণে সরল-রেখায় গমনরত একটি রেলগাড়ির দুইপ্রান্তের বেগ u_1 এবং u_2 হলে, উপরোক্ত বিন্দু অতিক্রম করার কালে রেলগাড়িটির মধ্যবিন্দুর বেগ নির্ণয় কর।

4. একই বিন্দু হতে একই সময়ে স্থির দশা থেকে দুটি কণা সরল-রেখায় সুষম, কিন্তু বিভিন্ন ত্বরণে যাত্রা সুরু করে। পাঁচ মিনিট পরে প্রথম কণার বেগ দ্বিতীয়টি অপেক্ষা 2 cm/s অধিক হলে, সেই মুহূর্তে প্রথম কণাটি দ্বিতীয়টি থেকে কতটা এগিয়ে আছে নির্ণয় কর।

5. একটি রেলগাড়ির দ্রুতি শূন্য থেকে সুষম f_1 হারে বেড়ে V হয় এবং তারপর কিছুক্ষণের জন্য দ্রুতির মান অপরিবর্তিত থাকে; অতঃপর সমান হার f_2-তে দ্রুতি কমে শূন্য হয়। যদি সম্পূর্ণ দূরত্ব d হয়, তবে দেখাও যে সম্পূর্ণ সময় হ'ল

$$\frac{d}{V}+\frac{1}{2}V\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right).$$

V-এর মান কত হলে সময়ের মান ক্ষুদ্রতম হবে?

6. আনুভূমিক রেখায় গতিশীল একটি গুলি, সমান দূরত্ব d-তে অবস্থিত তিনটি পাতলা পর্দাকে পরপর ভেদ ক'রে নির্গত হয়। প্রথম পর্দাটি থেকে দ্বিতীয়টি পর্যন্ত সময় t_1 এবং দ্বিতীয়টি থেকে তৃতীয়টি পর্যন্ত সময় t_2 হলে, গুলিটির মন্দন সুষম ধ'রে নিয়ে দেখাও যে মন্দন হ'ল

$$\frac{2d\,(t_2-t_1)}{t_1t_2\,(t_1+t_2)},$$

এবং মাঝের পর্দায় বেগের মান হ'ল

$$\frac{d\,(t_1^2+t_2^2)}{t_1t_2\,(t_1+t_2)}.$$

7. বেগ v cm/s এবং অবস্থিতি x cm-এর সম্বন্ধ

$$v=12+\frac{x}{4}$$

হলে, $x=32$ cm দূরত্বে ত্বরণ নির্ণয় কর।

8. দুটি কণা একটি সরলরেখাখণ্ড CD-এর দুই প্রান্ত থেকে বিপরীত প্রান্ত অভিমুখে একই সময়ে সরলরেখায় যাত্রা সুরু করে। কণাদ্বয়ের আদি

বেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে u_1, f_1 এবং u_2, f_2. যদি CD-এর মধ্যবিন্দুতে একটি কণা অপরটিকে অতিক্রম করে এবং দুইপ্রান্তে উপস্থিত হওয়ার সময় বেগদ্বয় সমান হয়, তবে দেখাও যে

$$(u_1+u_2)(f_1-f_2)=8(f_1u_2-f_2u_1).$$

9. একটি ট্রামগাড়ি স্থির অবস্থা থেকে সুষম ত্বরণ f-এ সরলরেখায় চলা সুরু করল। একই সময়ে, ট্রামটিকে ধরার জন্য d দূরত্ব থেকে এক ব্যক্তি সুষম বেগ V-তে ট্রামের পিছনে ছোটা সুরু করল। দেখাও যে ব্যক্তিটি গাড়িটিকে ধরতে পারবে যদি

$$V^2 \geq 2fd.$$

10. সরলরেখায় V বেগে গমনরত একটি গুলি বালুকার মধ্যে a cm গমন করলে বেগ শূন্য হয়। গুলিটি যদি বালুকার মধ্যে b cm ($b < a$) প্রবেশ করে, তবে বেগ হয় U. দেখাও যে

$$\frac{U}{V}=\sqrt{\frac{a-b}{a}}.$$

11. একটি নির্দিষ্ট উচ্চতা h থেকে দুটি কণাকে এক সেকেণ্ড অন্তর ছেড়ে দেওয়া হ'ল। দেখাও যে ভূপাতিত হওয়ার পূর্বে t-সময়ে কণাদ্বয়ের দূরত্ব

$$\frac{2t-1}{2}g.$$

12. একটি মিনারের শীর্ষদেশ থেকে একটি বস্তু অবাধ পতনকালে শেষ সেকেণ্ডে মোট উচ্চতার দুই-তৃতীয়াংশ পথ অতিক্রম করলে মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

13. উল্লম্ব ঊর্ধ্ব-দিশায় V cm/s বেগে একটি কণাকে নিক্ষেপ করা হ'ল। t-সেকেণ্ড পরে একই বিন্দু থেকে একই বেগে আর একটি কণাকে ঊর্ধ্বে নিক্ষেপ করা হ'ল। দেখাও যে কণাদ্বয় ভূমি থেকে

$$\frac{4V^2-g^2t^2}{8g}\text{ cm}$$

উচ্চতায় পরস্পর মিলিত হবে।

14. ঊর্ধ্বে নিক্ষিপ্ত একটি কণার উচ্চতা t_1 এবং t_2 সেকেণ্ড পরে h হলে, দেখাও যে

$$h=\tfrac{1}{2}g\,t_1t_2$$

এবং কণাটির আদি বেগ

$$\tfrac{1}{2}g\,(t_1+t_2).$$

15. কোন মিনারের শীর্ষদেশ থেকে অবাধ পতনকালে একটি কণা শেষ h cm. পথ t সেকেণ্ডে অতিক্রম করলে দেখাও যে কণাটির পতনের সম্পূর্ণ সময়

$$\left(\frac{t}{2}+\frac{h}{gt}\right)$$

সেকেণ্ড।

16. সুষম ত্বরণ f-বিশিষ্ট ঊর্ধ্বগামী একটি লিফ্‌টে, একটি বালক উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিশায় লিফ্‌ট সাপেক্ষে V বেগে একটি বল ছুঁড়ে মারে এবং T সেকেণ্ড বাদে পুনরায় সেটিকে ধ'রে ফেলে। দেখাও যে

$$f+g=\frac{2V}{T}.$$

17. একটি বালক কোন কূপে একটি প্রস্তরখণ্ড ফেলে দেওয়ার T সেকেণ্ড পরে প্রস্তরটির জলে আঘাত করার শব্দ শুনতে পেল। দেখাও যে জলের গভীরতা h-এর মান

$$h+35\sqrt{2gh}=35g\mathrm{T}$$

সমীকরণের ধনাত্মক সমাধান থেকে পাওয়া যায়। (শব্দের দ্রুতি $35g$ প্রায়, ধর)।

18. সুষম ত্বরণে সরলরেখায় গমনরত একটি কণা p-তম, q-তম ও r-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে x, y, z দূরত্ব অতিক্রম করলে, দেখাও যে

$$x(q-r)+y(r-p)+z(p-q)=0.$$

উত্তরমালা 2(ক)

1. 75 cm.

2. 90 cm./s ; 60 cm./s².

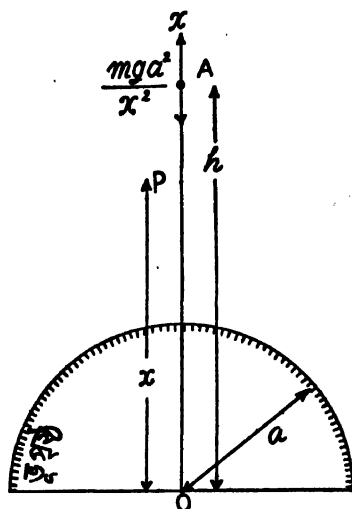
3. $\sqrt{\tfrac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)}$.

4. 300 cm.

7. 5 cm./s².

12. $\dfrac{3(2\pm\sqrt{3})}{4}g$.

2.4. ব্যস্ত-বর্গ-নিয়ম অনুসারী বলের জন্য ঋজু-রেখ গতি—একটি কণা যদি বহুদূর থেকে ভূ-পৃষ্ঠের দিকে নেমে আসে, তখন কিন্তু কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বলকে অচর ধরা চলে না। সেক্ষেত্রে, নিউটনের মহাকর্ষ নিয়ম অনুযায়ী কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল হ'ল

$$F = -G\frac{mm'}{x^2} \tag{33}$$

চিত্র 2·4

ভূ-পৃষ্ঠে উল্কাপাত। ব্যস্ত-বর্গ-নিয়মে ঋজুরেখ গতি।

যেখানে কণাটির ভর m, পৃথিবীর ভর m', এবং ভূকেন্দ্র O থেকে কণাটির দূরত্ব x, ও G মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (চিত্র 2·4)। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a, এবং মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণ g হলে, ভূ-পৃষ্ঠে এই বলের মান, (33) অনুযায়ী

$$-mg = -Gm\frac{m'}{a^2}. \tag{34}$$

সুতরাং

$$Gm' = ga^2.$$

এই মান (33)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$F = -m\frac{ga^2}{x^2}. \tag{35}$$

কাজেই, (35) ও (1) থেকে কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{a^2}{x^2}. \qquad (36)$$

(35) থেকে দেখা যাচ্ছে, কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল ভূ-কেন্দ্র থেকে কণাটির দূরত্বের ব্যস্ত বর্গের সমানুপাতিক এবং এখানে বল F অবস্থিতি x-এর ফাংশন। কাজেই 2·2 অনুচ্ছেদের (খ) ক্ষেত্রের ন্যায় এখানে (36) সমীকরণের সমাধান করা যাবে। (8) অনুযায়ী (36)-কে নিম্নরূপে লেখা যায়—

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{ga^2}{x^2},$$

অর্থাৎ

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -ga^2\frac{dx}{x^2}.$$

অবস্থিতি x-সাপেক্ষে সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{1}{2}v^2 = ga^2\cdot\frac{1}{x} + c_1 \qquad (37)$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর। আদি দশায়, কণাটিকে ভূ-কেন্দ্র O থেকে h দূরত্বে ছেড়ে দেওয়া হয়েছে ধরলে

$$x = h,\ v = 0.$$

এই মান (37)-এ বসিয়ে c_1-এর মান নির্ণয় করা যায়

$$0 = ga^2\cdot\frac{1}{h} + c_1.$$

সুতরাং, c_1-এর এই মান (37)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{2}v^2 = ga^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right)$$

বর্গমূল গ্রহণ ক'রে দাঁড়ায়

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = -\left[2ga^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (38)$$

এখানে ভূ-কেন্দ্র থেকে কণাটির আদি অবস্থার দিকে x-অক্ষরেখা নেওয়া হয়েছে এবং কণাটি ভূ-কেন্দ্রের দিকে গমন করছে ব'লে সময়ের সঙ্গে x হ্রাস পাচ্ছে। কাজেই (38)-এ ঋণাত্মক চিহ্নটি গ্রহণ করা হয়েছে এবং ধনাত্মক চিহ্নটি রাদ দেওয়া হয়েছে। সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$t=-\frac{1}{a\sqrt{2g}}\int\frac{dx}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{2}}}+c_2 \tag{39}$$

যেখানে c_2 সমাকলন অচর। সমাকলনের জন্যে এখানে ধরা হ'ল

$$\sqrt{x}=\sqrt{h}\sin\theta,\ dx=h.2\sin\theta\cos\theta\,d\theta. \tag{40}$$

সুতরাং

$$t=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}}\int\frac{\sqrt{h}\sin\theta.2h\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{h}\cos\theta}+c_2$$

$$=-\frac{h}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}}\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta+c_2$$

$$=-\frac{h}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}}\Big[\theta-\sin\theta\cos\theta\Big]+c_2.$$

(40) থেকে এখানে θ-এর মান বসিয়ে সরল করলে পাওয়া যায়

$$t=-\frac{h}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}}\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{h}}-\sqrt{\frac{x(h-x)}{h}}\right]+c_2. \tag{41}$$

আদি মুহূর্ত $t=0$-তে $x=h$ হলে (41) থেকে c_2-এর মান নির্ণয়ের সমীকরণ হ'ল

$$0=-\frac{h}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]+c_2.$$

(41) থেকে এই সমীকরণ বিয়োগ করে এবং সরল ক'রে দাঁড়ায়

$$t=\frac{h}{a}\sqrt{\frac{h}{2g}}\left[\cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{h}}+\frac{\sqrt{x(h-x)}}{h}\right] \tag{42}$$

অবস্থিতি সাপেক্ষে কণাটির বেগ ও সময়ের মান (38) ও (42) সমীকরণ দ্বারা প্রদত্ত হ'ল।

কণাটি যদি অসীম দূরত্ব $h \to \infty$ থেকে ভূ-কেন্দ্রের দিকে আসতে থাকে, তবে ভূ-পৃষ্ঠ $x=a$ পর্যন্ত এলে কণাটির বেগের মান দাঁড়াবে, (38) অনুযায়ী

$$v = -\sqrt{2ga}. \tag{43}$$

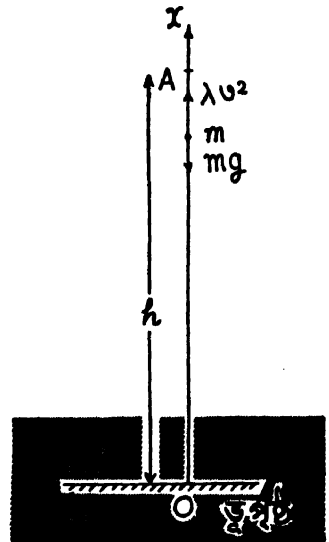
সেই বেগ কেন্দ্রাভিমুখী এবং এর পরিমাণ $\sqrt{2ga}$. পূর্বের অনুচ্ছেদে মাধ্যাকর্ষণ অচর ধ'রে (30) থেকে দেখা যাচ্ছে $h=a$ দূরত্ব থেকে ভূ-পৃষ্ঠে আসতেও একই সময়ের প্রয়োজন।

2·5. বায়ুর প্রতিরোধ-যুক্ত অবাধ পতন—ভূ-পৃষ্ঠের সন্নিকটে h দূরত্বে A বিন্দু থেকে কোন কণা ভূপাতিত হচ্ছে (চিত্র 2·5)। কণাটির গতিকে বায়ু প্রতিরোধ করছে। কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে। বায়ুর প্রতিরোধ বিবেচনা না ক'রে, এই সমস্যার সমাধান 2.3 অনুচ্ছেদে আলোচিত হয়েছে।

চিত্র 2·5
প্রতিরোধ-যুক্ত অবাধ পতন

সমস্যাটি সমাধানের জন্য বায়ুর প্রতিরোধ হেতু উদ্ভূত বলের মান জানা প্রয়োজন। নিউটনের ধারণা অনুযায়ী এই মান বেগের বর্গের সঙ্গে সমানুপাতিক। যদি কণাটির বেগ খুব কম না হয় বা শব্দের বেগের কাছাকাছি না হয়, তবে পরীক্ষামূলকভাবে দেখা গেছে, এই নিয়মটি বেশ খাটে। তাহলে, কণাটির উপর ক্রিয়াশীল মোট বল হ'ল

$$F = -mg + \lambda v^2, \tag{44}$$

যেখানে $\lambda(>0)$ সমানুপাত-জনিত অচর। লক্ষ্য করার বিষয়, কণাটি যেদিকে গমন করছে, বায়ুর প্রতিরোধ তার বিপরীত দিশায় ক্রিয়া করে—অর্থাৎ Ox-দিশায় (চিত্র 2·5) ক্রিয়া

করে ব'লে (44)-এ দ্বিতীয় পদের পূর্বে ধনাত্মক চিহ্নটি দেওয়া হয়েছে। সুতরাং (1) অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg + \lambda v^2.$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে লেখা যায়

$$\frac{dv}{dt} = -g(1-\mu^2 v^2), \qquad (45)$$

যেখানে $\mu^2 = \dfrac{\lambda}{mg}$

একটি ধনাত্মক অচর। আদি অবস্থায় কণাটিকে A বিন্দুতে শূন্যে ছেড়ে দেওয়া হয়েছে ধ'রে, আদি দশা হ'ল

$$t=0,\ x=h,\ v=0. \qquad (45')$$

(45) থেকে দেখা যাচ্ছে, আদি অবস্থায় কণাটির ত্বরণ নিম্নাভিমুখী। কাজেই, কণাটি নিম্নাভিমুখে অবতরণ করতে থাকে, এবং বেগ হ্রাস পায় অর্থাৎ দ্রুতি বাড়তে থাকে। x-অক্ষরেখা ঊর্ধ্বাভিমুখে গ্রহণ করা হয়েছে ব'লে v ঋণাত্মক। আরও লক্ষ্য করার বিষয়, যখন $\mu v = -1$, তখন ত্বরণের মান শূন্য,—অর্থাৎ বেগের মান হ্রাস পেতে পেতে $v = -\dfrac{1}{\mu}$ হলে, ত্বরণের মান শূন্য হয় এবং অতঃপর বেগের মান অপরিবর্তিত থাকে। বেগের এই মানকে বেগের সীমান্ত মান বা **সীমান্ত বেগ** বলে। লক্ষণীয়, যে কণাটির দ্রুতি $\dfrac{1}{\mu}$-এর অধিক হতে পারে না।

2·2 অনুচ্ছেদের (গ) ক্ষেত্রের ন্যায় (45) সমীকরণের সমাধান করা যায়। সমাকলন দ্বারা আসে

$$-gt = \int \frac{dv}{1-\mu^2 v^2} + c_1, \qquad (46)$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর। উপরের সমাকলনের মান সহজেই নিম্নরূপে পাওয়া যায়—

$$\int \frac{dv}{1-\mu^2 v^2} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{1-\mu v} + \frac{1}{1+\mu v}\right]dv = \frac{1}{2\mu} ln\left|\frac{1+\mu v}{1-\mu v}\right|,$$

যেখানে $ln = \log_e$. এই মান (46)-এ বসিয়ে আসে

$$-gt = \frac{1}{2\mu} ln \frac{1+\mu v}{1-\mu v} + c_1.$$

আদি দশায় $t=0$, $v=0$ ধরা হয়েছে। কাজেই,

$$0 = \frac{1}{2\mu} \cdot 0 + c_1$$

অর্থাৎ $c_1 = 0$. অতএব,

$$-gt = \frac{1}{2\mu} ln \left|\frac{1+\mu v}{1-\mu v}\right|,$$

অর্থাৎ
$$\left|\frac{1+\mu v}{1-\mu v}\right| = e^{-2\mu gt} \tag{47}$$

লক্ষ্য করার বিষয়, যে কণাটির গতিতে বেগ সর্বদাই ঋণাত্মক এবং বেগের ক্ষুদ্রতম মান $v = -\frac{1}{\mu}$. সুতরাং, বাঁ-দিকের ভগ্নাংশের হর বা লব ঋণাত্মক নয়। অতএব, (47)-এর বাঁ-দিকে পরমচিহ্ন বাদ দিয়ে লেখা যায়

$$\frac{1+\mu v}{1-\mu v} = e^{-2\mu gt}.$$

উভয়পক্ষের যোগ ও ভাগ ক্রিয়া দ্বারা পাওয়া যায়

$$\mu v = \frac{e^{-2\mu gt} - 1}{e^{-2\mu gt} + 1} \tag{48}$$

বায়ুর প্রতিরোধ বিবেচনা না ক'রে, বেগের মান এসেছিল [(26) দ্রষ্টব্য],

$$v = -gt.$$

(48) থেকে দেখা যায় $t \to \infty$ সীমান্তে $v \to -\frac{1}{\mu}$, অর্থাৎ কণাটির গতি সুরু হওয়ার অসীম সময় পরেই কেবল কণাটির বেগ সীমান্ত বেগের সমান হতে পারে।

বায়ুর প্রতিরোধের ফলে, বেগের মানের প্রথম শুদ্ধি পদ পাবার জন্য

(48)-এর ডানপক্ষকে একটি সময়ের শ্রেণীতে প্রসারিত করা হ'ল (t—ক্ষুদ্র ধ'রে নিয়ে) ;

$$\mu v = \left\{\left(1 - 2\mu gt + \frac{4\mu^2 g^2 t^2}{2} - \frac{8\mu^3 g^3 t^3}{6} + \cdots\right) - 1\right\}\cdot$$

$$\left\{1 + 1 + 2\mu gt + \frac{4\mu^2 g^2 t^2}{2} + \frac{8\mu^3 g^3 t^3}{6} + \cdots\right\}^{-1}\cdot$$

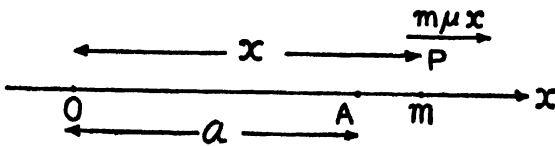
$$= -\mu gt\left\{1 - \frac{\mu^2 g^2 t^2}{3} + \cdots\right\}$$

অর্থাৎ

$$v = -gt\left[1 - \frac{(\mu gt)^2}{3} + \cdots\right]. \tag{49}$$

দেখা যাচ্ছে, গতি সুরু হবার স্বল্প সময় পরে, শুদ্ধি পদটি সময়ের তৃতীয় ঘাতের উপর নির্ভর করে। এটি একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা।

উদা. 4. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার উপর, মূলবিন্দু থেকে x-দূরত্বে, প্রতি একক ভরের জন্য μx পরিমাণ বিকর্ষক বল ক্রিয়া করছে। আদি সময়ে কণাটিকে মূলবিন্দু থেকে a দূরত্বে ছেড়ে দেওয়া হলে, কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে।

$m\mu x$
x P
O A m x
a

ধরা যাক, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি P, মূলবিন্দু O এবং $OP = x$. কণাটির ভর m ধরলে ক্রিয়াশীল বল

$$F = m\mu x, \quad \mu > 0,$$

$\overrightarrow{OP}$ দিশায় ক্রিয়া করছে। কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\mu x.$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, এবং পক্ষান্তর ক'রে উপরের সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu x = 0. \qquad \text{(i)}$$

(i) সমাধানের উদ্দেশ্যে $x = e^{m't}$ পরীক্ষামূলক সমাধান ধ'রে, সমীকরণটিতে বসিয়ে দেখা যায় যে

$$e^{m't}\,(m'^2 - \mu) = 0.$$

সুতরাং,

$$m' = \sqrt{\mu} \text{ এবং } -\sqrt{\mu}$$

হ'লে $x = e^{m't}$ (i) সমীকরণের সমাধান হবে। উপরিপাত নীতি অনুযায়ী (i)-এর সমাধান হ'ল

$$x = Ae^{\sqrt{\mu}t} + Be^{-\sqrt{\mu}t}, \qquad \text{(ii)}$$

যেখানে A এবং B সমাকলন অচর। A এবং B অচর-দ্বয় নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয় আদি দশা হ'ল

$$t = 0, \quad x = a, \quad v = 0. \qquad \text{(iii)}$$

এই মান (ii)-তে বসিয়ে আসে

$$a = A + B, \qquad \text{(iv)}$$

(ii)-কে সময় সাপেক্ষে অবকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$v = \frac{dx}{dt} = A\sqrt{\mu}\,e^{\sqrt{\mu}t} - B\sqrt{\mu}e^{-\sqrt{\mu}t} \qquad \text{(v)}$$

এখানে আদি দশা (iii) বসিয়ে আসে

$$0 = A\sqrt{\mu} - B\sqrt{\mu} \qquad \text{(vi)}$$

(iv) এবং (vi) একসঙ্গে সমাধান ক'রে পাওয়া যায়

$$A = B = \frac{a}{2}.$$

এই মান (ii) এবং (v)-এ বসিয়ে, আমরা সমস্যাটির সমাধান পাই

$$x=\frac{a}{2}\ (e^{\sqrt{\mu}t}+e^{-\sqrt{\mu}t})$$

এবং (vii)

$$v=\frac{a}{2}\ \sqrt{\mu}\,(e^{\sqrt{\mu}t}-e^{-\sqrt{\mu}t})$$

সময় সাপেক্ষে বেগ ও অবস্থিতির মান (vii) থেকে পাওয়া যায়। এখান থেকে দেখা যায়, সময় বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে অবস্থিতি এবং বেগ উভয়ই বৃদ্ধি পাচ্ছে এবং অসীম সময় পরে অবস্থিতি ও বেগ উভয়ই অসীমের দিকে ধাবিত হয়।

উদা. 5. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার উপর প্রতি একক ভরের জন্য, মূলবিন্দু থেকে x দূরত্বে $\frac{\lambda}{x^2}$ $(\lambda > 0)$ বিকর্ষক বল ক্রিয়া করছে। আদি সময়ে, কণাটি মূলবিন্দু থেকে c দূরত্বে থাকলে কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে এবং x অবস্থিতি পর্যন্ত আসতে প্রয়োজনীয় সময় নির্ণয় করতে হবে

এক্ষেত্রে কণাটির গতীয় সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\lambda}{x^2},\quad \lambda > 0.$$

সমাকলনের জন্য $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dx}\ (\tfrac{1}{2}v^2)$ লক্ষ্য ক'রে সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$d\,(\tfrac{1}{2}v^2)=\frac{\lambda}{x^2}\ dx$$

সমাকলন করলে আসে

$$\tfrac{1}{2}v^2=-\frac{\lambda}{x}+\text{A}, \qquad \text{(i)}$$

যেখানে A সমাকলন অচর। আদি সময়ে,

$$t=0,\quad x=c,\quad v=0.$$

সুতরাং (i)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$0=-\frac{\lambda}{c}+\mathrm{A}, \quad \text{অর্থাৎ} \quad \mathrm{A}=\frac{\lambda}{c}.$$

এই মান (i)-এ বসিয়ে সরল ক'রে, বর্গমূল নিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{dx}{dt}=v=\sqrt{\frac{2\lambda\,(x-c)}{cx}} \tag{ii}$$

এখানে বল বিকর্ষক এবং কণাটি x-বৃদ্ধি অভিমুখে গমন করছে ব'লে ধনাত্মক বর্গমূল গ্রহণ করা হয়েছে। সমাকলন করার উদ্দেশ্যে (ii)-কে নিম্নরূপে লেখা হ'ল,

$$\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}\,dt=\sqrt{\frac{x}{x-c}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2x-c}{\sqrt{x(x-c)}}+\frac{c}{\sqrt{x(x-c)}}\right\}dx$$

$t=0$ থেকে t সময় পর্যন্ত সমাকলন করলে আসে

$$\int_0^t\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}\,dt=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x}\frac{2x-c}{\sqrt{x(x-c)}}\,dx$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}}}$$

অর্থাৎ
$$\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}\,t=\sqrt{x(x-c)}\,\Big]_{x=0}^{x}$$

$$+\frac{c}{2}\ln\left|x-\frac{c}{2}+\sqrt{x(x-c)}\right|\Big]_{x=0}^{x}$$

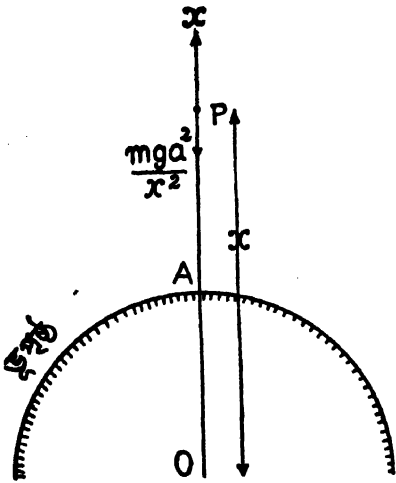
$$=\sqrt{x(x-c)}+\frac{c}{2}\ln\frac{x-\frac{c}{2}+\sqrt{x(x-c)}}{\frac{c}{2}}$$

$$=\sqrt{x(x-c)}+\frac{c}{2}\ln\left|\left(\sqrt{\frac{x}{c}}+\sqrt{\frac{x}{c}-1}\right)^2\right|$$

উভয়পক্ষকে $\sqrt{2\lambda}$ দ্বারা ভাগ ক'রে ও সরল ক'রে পাওয়া যায়

$$t=\sqrt{\frac{c}{2\lambda}}\left[\sqrt{x(x-c)}+c\ln\left(\sqrt{\frac{x}{c}}+\sqrt{\frac{x}{c}-1}\right)\right] \quad \text{(iii)}$$

এখানে সময়কে অবস্থিতির ফাংশন-রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। বেগকে অবস্থিতির ফাংশন-রূপে (ii) সমীকরণে প্রকাশ করা হয়েছে। (ii) থেকে দেখা যায় বেগের মান $\sqrt{2\lambda}$-এর অধিক হতে পারে না।

উদা 6. ভূপৃষ্ঠ থেকে উল্লম্ব ঊর্ধ্বাভিমুখে একটি কণাকে এমন বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল, যা কণাটিকে অসীম দূরত্বে পৌঁছে দেবার পক্ষে ঠিক যথেষ্ট হবে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a হলে, h উচ্চতা পর্যন্ত পৌঁছতে কণাটির যে সময় লাগবে তা নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত A বিন্দু থেকে উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিশা OA অভিমুখে কণাটিকে v_0 বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। ভূ-কেন্দ্র O-কে মূলবিন্দু ধ'রে OA দিশায় x-অক্ষরেখা গ্রহণ করা হ'ল। এক্ষেত্রে, কণাটি ভূ-পৃষ্ঠ থেকে বহুদূরে পর্যন্ত যেতে পারে ব'লে, কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল মহাকর্ষ নিয়ম অনুযায়ী নির্ধারিত হবে। t-সময়ে কণাটি মূলবিন্দু থেকে x-দূরত্বে থাকলে, (36) অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণ আসে

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{ga^2}{x^2}.$$

সমাকলনের জন্য $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$ লক্ষ্য ক'রে সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$d(\tfrac{1}{2}v^2)=-\frac{ga^2}{x^2}dx.$$

সমাকলন ক'রে আসে

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{ga^2}{x} + \text{A}, \tag{i}$$

যেখানে A সমাকলন অচর। আদি দশায় $t=0,\ x=a,\ v=v_0$. এই মান (i)-এ বসিয়ে আসে

$$\tfrac{1}{2}v_0^2 = \frac{ga^2}{a} + \text{A}.$$

এই সমীকরণটিকে (i) থেকে বিয়োগ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = ga.\frac{a-x}{x} = ga\left(\frac{a}{x} - 1\right) \tag{ii}$$

কিন্তু প্রদত্ত সর্তানুসারে, $x \to \infty$ সীমান্তে $v \to 0$. কাজেই (ii) থেকে আসে

$$\tfrac{1}{2}(0 - v_0^2) = -ga, \text{ অর্থাৎ } v_0^2 = 2ga.$$

v_0^2-এর এই মান (ii)-তে বসিয়ে, সরল ক'রে ও বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আমরা পাই

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2ga^2}{x}}.$$

কণাটি x-বৃদ্ধি অভিমুখে গমন করছে ব'লে এখানে ধনাত্মক বর্গমূলটি গ্রহণ করা হয়েছে। সমীকরণটির সমাকলন করলে আসে

$$\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \text{B} = \sqrt{2ga^2}\,.\,t, \tag{iii}$$

যেখানে B সমাকলন অচর। এখানে আদি দশা বসালে দাঁড়ায়

$$\tfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + \text{B} = 0 \text{ অর্থাৎ } \text{B} = -\tfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}.$$

এই মান (iii)-এ বসিয়ে, আমরা পাই

$$\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2ga^2}\,.\,t$$

কাজেই, ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতা পর্যন্ত পৌঁছতে প্রয়োজনীয় সময় হ'ল

$$t = \frac{1}{\sqrt{2ga^2}}.\frac{2}{3}\left\{(a+h)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right\}$$

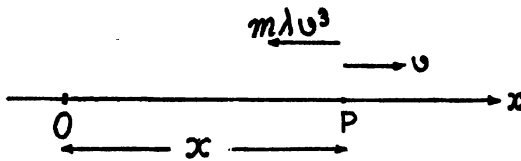
$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}}\left\{\left(1+\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}.$$

উদা. 7. একটি কণাকে v_0 বেগে সরলরেখায় নিক্ষেপ করা হ'ল। কণাটির গতিতে প্রতিরোধ-জনিত মন্দনের পরিমাণ বেগের তৃতীয় ঘাতের সমানুপাতিক এবং আদি মন্দন f হলে, t সময়ে কণাটি যে দূরত্ব অতিক্রম করবে, তার মান নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, আদি সময়ে কণাটি মূলবিন্দু O-তে অবস্থিত এবং t সময়ে মূলবিন্দু O থেকে কণাটির দূরত্ব x এবং বেগ v. প্রদত্ত সর্তানুসারে, মন্দন $\left(-\dfrac{dv}{dt}\right)$ বেগের তৃতীয় ঘাতের সমানুপাতিক বলে,

$m\lambda v^3$ ←   → v

O   P x

← x →

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v^3, \quad \lambda > 0 \tag{i}$$

যেখানে λ সমানুপাত-জনিত অচর। ডানদিকের ঋণাত্মক চিহ্নটি মন্দন সূচিত করে। আদি মন্দন f, এবং আদি বেগ v_0 ব'লে

$$-f = -\lambda\, v_0^3, \text{ অর্থাৎ } \lambda = \frac{f}{v_0^3}.$$

এই মান (i)-এ বসিয়ে সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\frac{f}{v_0^3}dt = -\frac{dv}{v^3}.$$

সমাকলন ক'রে আসে

$$\frac{f}{v_0^3}\, t + c = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{v^2} \tag{ii}$$

যেখানে c সমাকলন অচর। আদি দশা $t = 0$, $v = v_0$ এখানে বসিয়ে আমরা পাই

$$0 + c = \frac{1}{2}\,\frac{1}{v_0^2}$$

c-এর এই মান (ii)-তে বসিয়ে সরল ক'রে দাঁড়ায়

$$v^2 = \frac{v_0^3}{2ft + v_0}$$

কণাটি x-বৃদ্ধি অভিমুখে গমন করছে ব'লে, এখানে ধনাত্মক বর্গমূল গ্রহণ ক'রে, সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লিখতে পারি

$$\frac{dx}{dt} \equiv v = \sqrt{\frac{v_0^3}{2ft + v_0}} \qquad \text{(iii)}$$

সমাকলন ক'রে x-এর মান আসে

$$\int_{x=0}^{x} dx = \int_{t=0}^{t} \sqrt{\frac{v_0^3}{2ft + v_0}}\, dt$$

অর্থাৎ

$$x = \frac{\sqrt{v_0^3}}{2f} \cdot 2\sqrt{2ft + v_0}\Big]_{t=0}^{t} = \frac{\sqrt{v_0^3}}{f}\left\{\sqrt{2ft + v_0} - \sqrt{v_0}\right\}$$

সুতরাং, নির্ণেয় দূরত্ব

$$x = \frac{v_0^2}{f}\left\{\left(1 + \frac{2ft}{v_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}.$$

উদা. ৪. P ধ্রুবক হারে কর্মরত একটি ইঞ্জিন M ভর-বিশিষ্ট একটি বোঝাকে সরলরেখায় টানছে, যেখানে ক্রিয়াশীল প্রতিরোধ R. দেখাতে হবে, যে চরম দ্রুতির মান $\frac{P}{R}$ এবং এই দ্রুতির অর্ধাংশ পর্যন্ত পৌঁছতে প্রয়োজনীয় সময় হ'ল

$$\frac{MP}{R^2}\left(ln\, 2 - \tfrac{1}{2}\right).$$

ধরা যাক, ইঞ্জিন দ্বারা সৃষ্ট চালক-বল F. তাহলে, P ধ্রুবক হারে ইঞ্জিন কাজ করছে ব'লে

$$Fv = P \qquad \text{(i)}$$

যেখানে t-সময়ে ইঞ্জিন বা বোঝার বেগ v ধরা হয়েছে। বোঝাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$M\frac{dv}{dt} = F - R$$

(i) থেকে F-এর মান এখানে বসিয়ে আসে

$$M\frac{dv}{dt}=\frac{P}{v}-R. \tag{ii}$$

বেগের মান চরম হবে যখন

$$\frac{dv}{dt}=0$$

কাজেই, (ii) থেকে দেখা যায় চরম দ্রুতির মান হ'ল P/R.

সমাকলনের উদ্দেশ্যে (ii)-কে নিম্নরূপে লেখা হ'ল,

$$\frac{1}{M}dt=\frac{v}{P-Rv}dv=\frac{1}{R}\left\{\frac{P}{P-Rv}-1\right\}dv.$$

$v=0$ থেকে $v=\frac{P}{2R}$ পর্যন্ত সমাকলন ক'রে, নির্ণেয় সময় t-এর জন্য সমীকরণ আসে

$$\frac{1}{M}t=\frac{1}{R}\int_{v=0}^{\frac{P}{2R}}\left\{\frac{P}{P-Rv}-1\right\}dv$$

$$=\frac{1}{R}\left[-\frac{P}{R}ln|P-Rv|-v\right]^{\frac{P}{2R}}$$

$$=\frac{1}{R}\left[-\frac{P}{R}\quad P-R\cdot\frac{P}{2R}\quad-\frac{P}{2R}\right]$$

$$=\frac{P}{R^2}\left(ln\,2-\frac{1}{2}\right).$$

সুতরাং নির্ণেয় সময়

$$t=\frac{MP}{R^2}\left(ln\,2-\frac{1}{2}\right).$$

প্রশ্নমালা 2(খ)

1. সরলরেখায় গমনশীল একটি কণার উপর, বলকেন্দ্র থেকে x দূরত্বে, প্রতি একক ভরের জন্য $\frac{\lambda}{x^2}$ পরিমাণ বল ক্রিয়া করছে। বলটি

বিকর্ষক এবং আদি সময়ে কণাটি বলকেন্দ্র থেকে $2a$ দূরত্বে আছে ধ'রে, $4a$ দূরত্বে কণাটির বেগ নির্ণয় কর।

2. সরলরেখায় গমনশীল একটি কণার উপর বলকেন্দ্র থেকে x-দূরত্বে, প্রতি একক ভরের জন্য $\frac{\lambda}{x^3}$ পরিমাণ আকর্ষক বল ক্রিয়া করছে। কণাটি যদি স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা আরম্ভ করে এবং আদি সময়ে বলকেন্দ্র থেকে $2c$ দূরত্বে থাকে, তাহলে দেখাও যে কণাটি বলকেন্দ্র থেকে c দূরত্বে থাকবে

$$\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\left(\frac{c^3}{\lambda}\right)^{1/2}$$

সময় পারে।

3. পৃথিবীর আকর্ষণে অসীম দূরত্ব থেকে একটি কণা ভূ-পৃষ্ঠের দিকে নেমে আসছে। ভূ-পৃষ্ঠ পর্যন্ত আসতে কণাটি যে বেগ লাভ করবে, দেখাও যে তাহা ধ্রুবক মাধ্যাকর্ষণ ক্ষেত্রে (মাধ্যাকর্ষণ $=g$) পৃথিবীর ব্যাসার্ধের সমান দূরত্ব অতিক্রম করাতে লব্ধ বেগের সমান।

4. দেখাও যে, পৃথিবীর আকর্ষণে h দূরত্ব থেকে ভূ-পৃষ্ঠে পাতিত হতে একটি কণার যে সময়ের প্রয়োজন তা হ'ল

$$\left(\frac{a+h}{2g}\right)^{1/2}\left[\frac{a+h}{a}\sin^{-1}\left(\frac{h}{a+h}\right)^{1/2}+\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}\right],$$

যেখানে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a, এবং ভূ-পৃষ্ঠে মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণের মান g ; (3 ও 4 প্রশ্নে পৃথিবীর আকর্ষণ কণাটির দূরত্বের বর্গের ব্যস্ত সমানুপাতিক, ধর)।

5. সরলরেখায় গমনশীল একটি কণার উপর বলকেন্দ্র থেকে x দূরত্বে প্রতি একক ভরের জন্য $\frac{\lambda}{x^3}$ পরিমাণ আকর্ষক-বল ক্রিয়া করছে। বলকেন্দ্র থেকে c দূরত্বে স্থির অবস্থা থেকে কণাটি যাত্রা সুরু করলে, দেখাও যে, বলকেন্দ্র থেকে d দূরত্বে অবস্থিত বিন্দু পর্যন্ত যেতে কণাটির যে সময়ের প্রয়োজন, তা হ'ল

$$\frac{c\sqrt{c^2-d^2}}{\sqrt{\lambda}}$$

এবং তখন কণাটির বেগ

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{cd}(c^2-d^2)^{1/2}.$$

6. m ভর-বিশিষ্ট একটি কণার উপর, মূলবিন্দু থেকে x-দূরত্বে মূলবিন্দু অভিমুখে $m\lambda\left(x+\frac{c^4}{x^3}\right)$ পরিমাণ বল ক্রিয়া করছে। কণাটি c দূরত্বে স্থির অবস্থা হতে যাত্রা সুরু করলে, দেখাও যে, মূলবিন্দু পর্যন্ত আসতে কণাটির যে সময় লাগবে তা হ'ল $\pi/4\sqrt{\lambda}$.

7. সরলরেখায় গমনশীল m ভর-বিশিষ্ট একটি কণার উপর, বলকেন্দ্র O থেকে x দূরত্বে $\frac{m\lambda}{x}$ পরিমাণ আকর্ষক বল ক্রিয়া করছে। কণাটি O থেকে c দূরত্বে স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা সুরু করলে, দেখাও যে O বিন্দু পর্যন্ত পৌঁছতে যে সময়ের প্রয়োজন তা হ'ল

$$c\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^{1/2}$$

8. বলকেন্দ্র থেকে x-দূরত্বে প্রতি একক ভরের জন্য $\lambda/x^{5/3}$ পরিমাণ আকর্ষক-বলের ক্ষেত্রে দেখাও যে একটি কণার সরলরেখায় c দূরত্ব থেকে বলকেন্দ্রে অবাধ পতনে প্রয়োজনীয় সময় $2c^{4/3}/\sqrt{3\lambda}$.

9. ভূ-পৃষ্ঠ থেকে একটি কণাকে উল্লম্ব ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষেপ করা হ'ল। এমন বেগে কণাটিকে নিক্ষেপ করা হ'ল যে, মাধ্যাকর্ষণ ধ্রুবক হলে, কণাটি h উচ্চতা পর্যন্ত পৌঁছাত। মাধ্যাকর্ষণ দূরত্বের বর্গের ব্যস্ত সমানুপাতিক হলে দেখাও যে, কণাটি যে উচ্চতা পর্যন্ত পৌঁছবে তা $h^2/(r-h)$ পরিমাণ অধিক, যেখানে r পৃথিবীর ব্যাসার্ধ সূচিত করে।

10. পৃথিবীর আকর্ষণে বহু দূর থেকে একটি কণার ভূ-পৃষ্ঠে অবাধ পতন ঘটলে, দেখাও যে সম্পূর্ণ দূরত্বের প্রথম ও দ্বিতীয় অর্ধাংশ অতিক্রম করতে যে সময় লাগে, তাদের অনুপাত আসন্নভাবে 9/2.

11. m ভর-বিশিষ্ট একটি কণাকে উল্লম্ব ঊর্ধ্বাভিমুখে v_0 দ্রুতিতে নিক্ষেপ করা হ'ল। কণাটির বেগ v হলে, বায়ুর প্রতিরোধ $m\lambda v^2$ ধ'রে,

(λ = ধ্রুবক >0), দেখাও যে, আদি নিক্ষেপ-বিন্দুতে প্রত্যাবর্তনের সময় কণাটির বেগ

$$v_0\left[1+\frac{\lambda v_0^2}{g}\right]^{1/2}.$$

12. পূর্বের প্রশ্নে, বায়ুর প্রতিরোধ $m\lambda v^2$-এর স্থলে $m\lambda v$ হলে, দেখাও যে আদি নিক্ষেপ-বিন্দুতে প্রত্যাবর্তনের সময় কণাটির বেগ V-এর মান নির্ণয়ের সমীকরণ হ'ল

$$g-\lambda V=(g+\lambda v_0)\exp\left[-\frac{\lambda(V+v_0)}{g}\right].$$

13. একটি কণাকে উল্লম্ব ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষেপ করা হল। যদি বায়ুর প্রতিরোধ কণাটির ওজনের m-তম অংশ হয়, তবে দেখাও যে আরোহণ এবং অবরোহণ সময়ের অনুপাত $\sqrt{(m-1)} : \sqrt{(m+1)}$-এর সমান।

14. যদি v_0 বেগে একটি কণা সরলরেখায় যাত্রা সুরু করে এবং কণাটির উপর শুধুমাত্র $(\lambda v+\mu v^2)$ প্রতিরোধ ক্রিয়াশীল হয়, তবে দেখাও যে থেমে যাওয়ার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব হ'ল

$$\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu}{\lambda}v_0\right).$$

15. m ভর-বিশিষ্ট একটি গাড়ি একটি সমতল সরল রাস্তায় গমন করছে। গাড়িটির ইঞ্জিনের ক্ষমতার মান P ধ্রুবক। গাড়িটির গতিতে ঘর্ষণ ধ্রুবক বাধা সৃষ্টি করছে। গাড়িটির চরম দ্রুতি W. স্থির অবস্থা থেকে গাড়িটি চলা সুরু করলে দেখাও যে, বেগ v হওয়া পর্যন্ত অতিক্রান্ত পথ d এবং সময় t-এর মান

$$d=\frac{mW^3}{P}\left[\ln\left(\frac{W}{W-v}\right)-\frac{v}{W}-\frac{v^2}{2W^2}\right]$$

এবং

$$t=\frac{d}{W}+\frac{mv^2}{2P}.$$

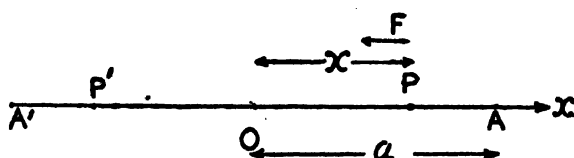
16. P-ধ্রুবক হারে শক্তি উৎপাদন-কারী একটি ইঞ্জিন, M ভর-বিশিষ্ট একটি বস্তুকে সরলরেখায় ঠেলে নিয়ে যাচ্ছে, যেখানে ক্রিয়াশীল-প্রতিরোধ

μv^2, μ ধ্রুবক এবং v বেগ সূচিত করে। দেখাও যে, স্থির অবস্থা থেকে অতিক্রান্ত দূরত্ব d-র মান

$$\frac{3d\mu}{M} = -ln\left(1 - \frac{\mu v^2}{P}\right).$$

17. M lbs ভর-বিশিষ্ট একটি কণা V_0 আদি বেগে গমন করছে। কণাটির বেগ বৃদ্ধি করার জন্য P-ধ্রুবক অশ্বশক্তি প্রয়োগ করা হ'ল। দেখাও যে কণাটির ত্বরণ আদি মানের $\frac{1}{N}$-তম অংশে পরিণত হতে যে সময়ের প্রয়োজন তা হ'ল

$$\frac{M(N^2-1)V_0^2}{1100gP}.$$

2·6. সরল সমঞ্জস গতি—ক্রিয়াশীল বল যদি কোন সরল-রেখায় একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে সর্বদা ক্রিয়া করে এবং বলের পরিমাণ যদি বিন্দুটি থেকে কণাটির দূরত্বের সমানুপাতিক হয়, তবে উদ্ভূত গতিকে **সরল সমঞ্জস গতি** বলে। যে সরলরেখা বরাবর বলটি ক্রিয়া করে সেই রেখাকে x-অক্ষরেখা এবং নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে মূলবিন্দু ধরা হ'ল (চিত্র 2·6)।

চিত্র 2·6—সরল সমঞ্জস গতি

তাহলে, কোন সময় t-তে, কণাটি O থেকে x-দূরত্বে P বিন্দুতে থাকলে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল হ'ল

$$F = -kx, \quad k > 0, \tag{50}$$

যেখানে k সমানুপাত-জনিত অচর সূচিত করে। P বিন্দুতে বলটি PO অভিমুখে ক্রিয়া করে ব'লে এখানে ঋণাত্মক চিহ্নটি দেওয়া হয়েছে। তাহলে (1) অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, ও পক্ষান্তর ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu x=0, \tag{51}$$

যেখানে $\mu=\frac{k}{m}(>o)$. সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ (51) একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক সমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ, যার সহগগুলি অচর রাশি। $x=e^{nt}$ বসিয়ে, উপরিপাত নীতির সাহায্যে সহজেই এরূপ অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে, সাধারণ সমাধান আসে

$$x=c_1 \cos\sqrt{\mu}\,t+c_2 \sin\sqrt{\mu}\,t, \tag{52}$$

যেখানে c_1 এবং c_2 অচর। আদি দশার সাহায্যে c_1 এবং c_2-এর মান নির্ণয় করা যায়। যদি আদি সময় $t=0$-তে কণাটির অবস্থিতি $x=a$ এবং বেগ $v=0$ হয়, তবে (52) থেকে দেখা যায়

$$a=c_1+0. \tag{53}$$

কাজেই (53) এবং অবকলন দ্বারা (52) থেকে পাওয়া যায়

$$v=\frac{dx}{dt}=-a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}t+c_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}\,t \tag{54}$$

সুতরাং, $t=0$, $v=0$, আদি দশার জন্য

$$0=0+c_2\sqrt{\mu},\ \text{অর্থাৎ } c_2=0. \tag{55}$$

(53) এবং (55) থেকে c_1 এবং c_2-এর মান (52) ও (54)-তে বসিয়ে সমাধান দাঁড়ায়

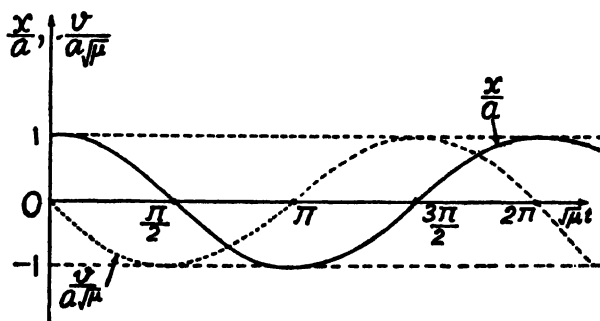
$$x=a\cos\sqrt{\mu}t, \tag{56a}$$

$$v=\frac{dx}{dt}=-a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}t. \tag{56b}$$

(56a, b) দ্বারা অবস্থিতি ও বেগকে সময়ের ফাংশন-রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। সময় t-এর মান যাই হোক না কেন $\cos\sqrt{\mu}t$-এর মান সর্বদাই -1 এবং $+1$-এর মধ্যে থাকে। কাজেই (56a) থেকে দেখা যাচ্ছে, মূলবিন্দু থেকে কণাটির দূরত্ব কখনও a-এর অধিক হতে পারে না। উপরন্তু $0<\sqrt{\mu}t<\pi$ অন্তরে t-বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $\cos\sqrt{\mu}t$-র মান ক্রমাগত হ্রাস পেতে থাকে ; $\sqrt{\mu}t=\frac{\pi}{2}$-এর জন্য এই মান শূন্য হয় এবং $\frac{\pi}{2}<\sqrt{\mu}t<\pi$

অন্তরে এই মান ঋণাত্মক। সুতরাং $(56a)$ থেকে দেখা যাচ্ছে, আদি সময় $t=0$ থেকে সময় বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে কণাটির x-স্থানাঙ্কের মান হ্রাস পেতে থাকে, অর্থাৎ কণাটি মূলবিন্দু O-এর দিকে গমন করে। যখন $\sqrt{\mu}t=\frac{\pi}{2}$, সেই সময়ে, অর্থাৎ যখন $t=\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$ তখন কণাটি মূলবিন্দুতে এসে পৌঁছয় এবং এই সময়ে কণাটির বেগ, $(56b)$ সমীকরণ অনুযায়ী, $v=-a\sqrt{\mu}$, অর্থাৎ বেগ OA' দিশায় $a\sqrt{\mu}$ পরিমাণ। এই সময়ে কণাটির ত্বরণের মান, (51) অনুযায়ী শূন্য ($x=0$ ব'লে)। $\sqrt{\mu}t$-এর মান $\frac{\pi}{2}$ থেকে আরও বাড়লে, কোনও অবস্থিতি P-এর জন্য x ঋণাত্মক, অর্থাৎ কণাটি OA' অভিমুখে গমন করতে থাকে (চিত্র 2·6)। তখন কণাটির উপর বল $P'O$ অভিমুখে ক্রিয়া করে, অর্থাৎ কণাটির গতির বিপরীত মুখে ক্রিয়া করে। $\sqrt{\mu}t$ বেড়ে যখন π-র সমান হয়, অর্থাৎ t যখন $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$-র সমান, তখন $x=-a$ এবং $v=0$. এই দশায় কণাটির অবস্থিতি চিত্রে A' বিন্দু দ্বারা সূচিত হয়েছে। কণাটির বেগ শূন্য এবং ত্বরণ $A'O$ অভিমুখে ব'লে কণাটি অতঃপর $A'O$ অভিমুখে গমন করে। $(56a)$ সমীকরণ থেকে তা বোঝা যায়, কারণ $\pi<\sqrt{\mu}t<2\pi$ অন্তরে সময়ের সঙ্গে $\cos\sqrt{\mu}t$-র মান বৃদ্ধি পেতে থাকে। কাজেই এই অন্তরে x-এর মানও বাড়তে থাকে। বাড়তে বাড়তে $\sqrt{\mu}t=2\pi$ হলে $x=a$ এবং $v=0$ হয়, অর্থাৎ কণাটি A বিন্দুতে ফিরে আসে এবং বেগ শূন্য হয়। এই অবস্থায় কণাটির উপর বল AO অভিমুখে ক্রিয়া করে ব'লে কণাটি পুনরায় AOA' অভিমুখে গমন করতে থাকে। A' বিন্দুতে পৌঁছে আবার $A'OA$ দিশায় প্রত্যাগমন করে এবং পূর্বে বর্ণিত গতির পুনরাবৃত্তি ঘটতে থাকে। কণাটির **এই পর্যাবৃত্ত গতির নাম সরল সমঞ্জস গতি**। দূরত্বের সমানুপাতিক আকর্ষক বলটিকে **প্রত্যানয়ক** বল বলে। A বিন্দু থেকে শুরু ক'রে A' পর্যন্ত গিয়ে আবার A বিন্দুতে ফিরে আসতে কণাটির যে সময়ের প্রয়োজন তাকে **পর্যায়কাল** বা **দোলনকাল** বলে। পর্যায়কাল বোঝাতে T প্রতীকের ব্যবহার করা হয়। কাজেই, এখানে

$$\sqrt{\mu}T=2\pi \text{ অর্থাৎ } T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}, \qquad (57)$$

(56*a*, *b*) সমীকরণ থেকে দেখা যায় t-র স্থলে $t+\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ বসালে x এবং v-এর মান অপরিবর্তিত থাকে, অর্থাৎ t সময়ে কণাটি যে অবস্থিতিতে, যে বেগে গমন করছিল, $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ সময় পরে কণাটি সেই একই অবস্থিতিতে, একই বেগে গমন করতে থাকবে। সুতরাং কণাটির পর্যায়কাল হ'ল $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. মূলবিন্দু O থেকে কণাটির সর্বাধিক দূরত্বকে এই পর্যাবৃত্ত গতির বিস্তার বলে। বর্তমান ক্ষেত্রে বিস্তার হ'ল a. সময় সাপেক্ষে অবস্থিতি এবং বেগের মান 2·7 চিত্রে দেখানো হয়েছে। লক্ষণীয় যে, পর্যায়কাল বিস্তারের উপর নির্ভর করে না।

চিত্র 2·7—সরল সমঞ্জস গতি

সময় সাপেক্ষে $\frac{x}{a}$ এবং $\frac{v}{a\sqrt{\mu}}$.

——$\frac{x}{a}$, ...$\frac{v}{v\sqrt{\mu}}$.

আবার (56*a*, *b*)-র মধ্যে সময় t-অপনয়ন করলে দাঁড়ায়

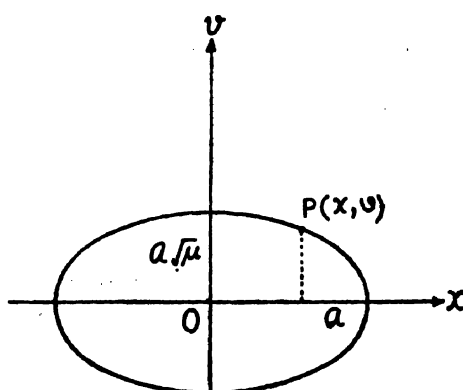
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{v^2}{a^2\mu}=1, \tag{58}$$

অর্থাৎ একটি উপবৃত্ত, যার পরাক্ষ এবং উপাক্ষ যথাক্রমে a এবং $a\sqrt{\mu}$ (চিত্র 2·8)। যদি $\mu=1$ হয়, তবে উপবৃত্তটি একটি বৃত্তে পরিণত হয়।

অনেক ক্ষেত্রে $\sqrt{\mu}$-র স্থলে ω প্রতীকটি ব্যবহার করা হয়। সেক্ষেত্রে (56*a*, *b*)-কে লেখা হয়

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cos \omega t, \\ v = -a\omega \sin \omega t \end{array}\right\} \qquad (56')$$

এবং পর্যায়কাল

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ অর্থাৎ } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \qquad (57')$$

চিত্র 2·8—অবস্থিতি সাপেক্ষে বেগ। সরল সমঞ্জস গতি

পর্যায়কালের ব্যস্ত সংখ্যা $\nu\left(=\frac{1}{\mathrm{T}}\right)$-কে **কম্পাঙ্ক** বলে এবং সাধারণতঃ ν প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। **একক সময়ে পর্যায়কালের সংখ্যা হ'ল** ν। কাজেই, (57′) থেকে দেখা যায় 2π **সময়ে পর্যায়কালের সংখ্যা হ'ল** ω, এবং এই সংখ্যার নাম হ'ল **বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক**। গতিবিদ্যায় সরল সমঞ্জস গতি অতিশয় গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে।

সরল সমঞ্জস গতিতে (চিত্র 2·6) কণাটি A বিন্দু থেকে A′ পর্যন্ত গিয়ে আবার A বিন্দুতে ফিরে আসছে এবং আবার A′-র দিকে যাচ্ছে, এবং অবিরাম এরকম গমনাগমন করছে,—অনেকটা দোলনার গতির মতো। তাই এই গতিকে সরল দোলনগতিও বলা হয়। A থেকে A′ পর্যন্ত গিয়ে আবার A-তে ফিরে আসাকে একটি **দোলন** বলা হয়। তাহলে পর্যায়কাল এবং দোলনকাল অভিন্ন।

সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ (51) একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ। এর সাধারণ সমাধানে দুটি পরস্পর স্বাধীন অচর থাকবে। (52) সমীকরণে c_1 এবং c_2 এরূপ দুটি অচর। লক্ষ্য করা দরকার, যে (52)-কে একটু ভিন্নরূপেও লেখা যায়, যেমন

$$x = \mathrm{A} \cos(\sqrt{\mu}t + \mathrm{B}), \tag{58a}$$

অথবা

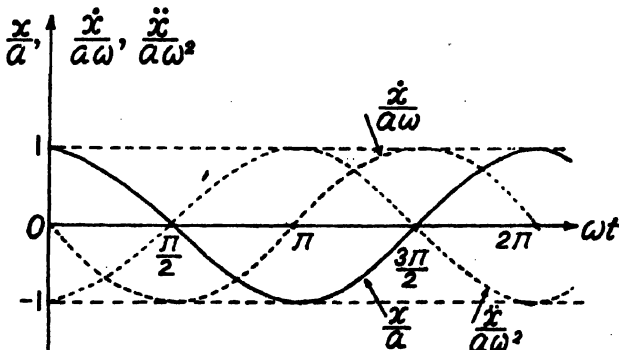
$$x = \mathrm{A}' \sin(\sqrt{\mu}t + \mathrm{B}'), \tag{58b}$$

যেখানে A, B এবং A′, B′ অচর। (52)-র সঙ্গে (58a)-র সম্বন্ধ বুঝতে হলে, (58a)-র ডানপক্ষকে ভাঙিয়ে লেখা হ'ল

$$x = \mathrm{A} \cos \mathrm{B} \cos \sqrt{\mu}t - \mathrm{A} \sin \mathrm{B} \sin \sqrt{\mu}t.$$

কাজেই $c_1 = \mathrm{A} \cos \mathrm{B}$ এবং $c_2 = -\mathrm{A} \sin \mathrm{B}$ ধরলে, দেখা যাচ্ছে (58a) এবং (52) সমীকরণদ্বয় অভিন্ন হয়। অনুরূপভাবে,

$$c_1 = \mathrm{A}' \sin \mathrm{B}', \text{ ও } c_2 = \mathrm{A}' \cos \mathrm{B}'$$

ধরলে (58b) এবং (52) সমীকরণদ্বয় অভিন্ন হয়। সুতরাং (58a)-কে সরল সমঞ্জস গতির সাধারণ সমীকরণ বলা যায়। এখানে A হ'ল বিস্তার এবং $(\sqrt{\mu}t + \mathrm{B})$-কে t-সময়ে সরল সমঞ্জস গতির **কলা** বলা হয়।

চিত্র 2·9—সরল সমঞ্জস গতিতে অবস্থিতি, বেগ ও ত্বরণের কলা

পূর্বে আলোচিত সরল সমঞ্জস গতির অবস্থিতি, বেগ ও ত্বরণকে (56′) অনুযায়ী নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$x = a \cos \omega t, \tag{59a}$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t = a\omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{59b}$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t = a\omega^2 \cos (\omega t + \pi). \tag{59c}$$

(59*a*) এবং (59*b*) থেকে দেখা যাচ্ছে, বেগ অবস্থিতি থেকে $\frac{\pi}{2}$ কলা এগিয়ে আছে এবং (59*a*) ও (59*c*) থেকে দেখা যাচ্ছে ত্বরণ অবস্থিতি থেকে π-কলা এগিয়ে আছে। চিত্র 2·9-এ অবস্থিতি, বেগ ও ত্বরণের কলা দেখানো হয়েছে।

2·7. দুইটি সরল সমঞ্জস দোলনের লব্ধি নির্ণয়—একই সরলরেখায়, কোন কণার দুটি সরল দোলনগতি রয়েছে, দোলনদ্বয়ের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে। এরূপ গতির উদাহরণ হিসেবে ভাবা যেতে পারে যে কণাটি কোন আধারে সরল দোলনগতিতে যাতায়াত করছে, আর সেই আধারটিকেও একই রেখায় দোলান হচ্ছে। আলোচনার সুবিধার্থে, প্রথমে আমরা ধরছি যে দোলনদ্বয়ের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক ω বা পর্যায়কাল T পরস্পর সমান। দোলনদ্বয়কে x_1 এবং x_2 দ্বারা সূচিত করলে, ধরা যাক

$$x_1 = a_1 \cos (\omega t + \varepsilon_1), \tag{60}$$

$$x_2 = a_2 \cos (\omega t + \varepsilon_2).$$

সুতরাং, দোলনদ্বয়ের লব্ধি x হ'ল

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos (\omega t + \varepsilon_1) + a_2 \cos (\omega t + \varepsilon_2)$$

ডানদিক ভাঙিয়ে সরল করলে দাঁড়ায়

$$x = \{a_1 \cos \varepsilon_1 + a_2 \cos \varepsilon_2\} \cos \omega t - \{a_1 \sin \varepsilon_1 + a_2 \sin \varepsilon_2\} \sin \omega t.$$

কাজেই,

$$x = a \cos (\omega t + \varepsilon), \tag{61}$$

যেখানে

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos \varepsilon_1 + a_2 \cos \varepsilon_2 &= a \cos \varepsilon, \\ a_1 \sin \varepsilon_1 + a_2 \sin \varepsilon_2 &= a \sin \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

(62)-র উভয়পক্ষকে বর্গ ক'রে, যোগ ক'রে এবং তারপর বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আসে

$$a=[a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]^{\frac{1}{2}}, \qquad (63a)$$

এবং (62) থেকে ভাগ ক'রে পাওয়া যায়

$$\tan\varepsilon=(a_1\sin\varepsilon_1+a_2\sin\varepsilon_2)/(a_1\cos\varepsilon_1+a_2\cos\varepsilon_2). \qquad (63b)$$

(61) থেকে দেখা যাচ্ছে দোলনদ্বয়ের লব্ধিও একটি সরল সমঞ্জস দোলন, যার বিস্তার এবং কলার মান যথাক্রমে (63a) এবং (63b) দ্বারা প্রদত্ত হয়েছে। বিস্তার a_1 এবং a_2-র মান ধনাত্মক ব'লে, লব্ধ-বিস্তার a-র মান সর্ববৃহৎ হবে, যখন $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, অর্থাৎ যখন দোলনদ্বয়ের কলা সমান। এক্ষেত্রে $a=a_1+a_2$. লব্ধ-বিস্তারের ক্ষুদ্রতম মান আসে, যখন $|\varepsilon_1-\varepsilon_2|=\pi$, এবং সেক্ষেত্রে বিস্তার $a=|a_1-a_2|$.

যদি দোলনদ্বয়ের বিস্তার পরস্পর সমান হয়, অর্থাৎ $a_1=a_2=a$ হয়, তবে লব্ধ-বিস্তারের সর্বাধিক মান হবে $2a$, (যখন দোলনদ্বয়ের কলা সমান)। আর $|\varepsilon_1-\varepsilon_2|=\pi$ হলে, লব্ধ-বিস্তারের ক্ষুদ্রতম মান আসে শূন্য। এক্ষেত্রে দোলনদ্বয় একটি অপরটির বিপরীতমুখী ও সমান-বিস্তার-বিশিষ্ট।

দোলনদ্বয়ের পর্যায়কাল বা বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক প্রায় সমান ধ'রে, এখন লব্ধি নির্ণয় করা হচ্ছে। এক্ষেত্রে

$$x_1=a_1\cos(\omega_1t+\varepsilon_1), \qquad (64a)$$

$$x_2=a_2\cos(\omega_2t+\varepsilon_2), \qquad (64b)$$

যেখানে

$$\omega_1-\omega_2=\omega' \qquad (64c)$$

ধরা হ'ল। স্বীকার্য অনুযায়ী ω' একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা। সুতরাং,

$$x_1=a_1\cos\{(\omega'+\omega_2)t+\varepsilon_1\}=a_1\cos\{\omega_2t+\varepsilon_3\}, \qquad (65a)$$

যেখানে

$$\varepsilon_3=\omega't+\varepsilon_1,$$

সময়ের উপর নির্ভর করে। কাজেই, প্রথমে বর্ণিত ক্ষেত্র অনুযায়ী (64*b*) এবং (65*a*)-এর লব্ধি হ'ল

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\omega_2 t + \varepsilon) \tag{66}$$

যেখানে (63*a*) এবং (63*b*) দ্বারা পাওয়া যায়

$$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)]^{\frac{1}{2}} \tag{67a}$$

এবং

$$\tan \varepsilon = (a_1 \sin \varepsilon_3 + a_2 \sin \varepsilon_2)/(a_1 \cos \varepsilon_3 + a_2 \cos \varepsilon_2) \tag{67b}$$

লক্ষ্য করা দরকার যে ε_3 সময়ের ফাংশন। (65*b*) থেকে ε_3-এর মান (67*a*) এবং (67*b*)-তে বসালে আসে

$$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\{\omega' t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\}]^{\frac{1}{2}} \tag{68a}$$

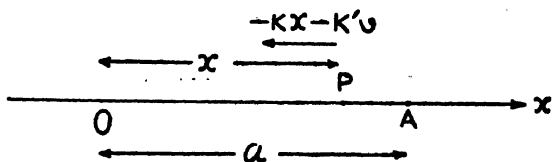
এবং

$$\tan \varepsilon = \frac{[a_1 \sin(\omega' t + \varepsilon_1) + a_2 \sin \varepsilon_2]}{[a_1 \cos(\omega' t + \varepsilon_1) + a_2 \cos \varepsilon_2]}. \tag{68b}$$

(66), (68*a*) এবং (68*b*) থেকে দেখা যাচ্ছে, এক্ষেত্রেও নির্ণেয় লব্ধি একটি প্রায় সরল সমঞ্জস দোলন, যার বিস্তার এবং কলা সময়ের সঙ্গে পর্যাবৃত্ত-রূপে পরিবর্তনশীল। ω' একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা ব'লে $\cos(\omega' t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$-এর পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\omega'}$ লব্ধ দোলনের পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\omega_2}$-এর তুলনায় বৃহৎ, অর্থাৎ বিস্তার a এবং কলা ε-এর মান খুব ধীরে ধীরে পরিবর্তিত হয়। উপরন্তু $\cos(\omega' t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$-এর মান $+1$ এবং -1-এর মধ্যে থাকে ব'লে লব্ধ-বিস্তার a-এর মান $a_1 + a_2$ এবং $|a_1 - a_2|$-এর মধ্যে থাকে।

শব্দতত্ত্বে স্বরকম্প ব্যাখ্যায় উপরের আলোচনা কাজে লাগে।

2·8. অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন—সরল সমঞ্জস গতি বা সরল সমঞ্জস দোলন 2·6 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে। এরূপ গতিশীল কোন কণার উপর আরও এক বা একাধিক বলের ক্রিয়ার ফলে উদ্ভূত গতি বর্তমান ও পরবর্তী অনুচ্ছেদে আলোচিত হবে। শব্দ-তত্ত্ব, তাড়িৎ-চুম্বকীয় তত্ত্ব প্রভৃতি বিভিন্ন ক্ষেত্রে এই ধরনের দোলনগতির প্রয়োগ দেখতে পাওয়া যায়।

প্রথমে ধরা হচ্ছে, বেগের সঙ্গে সমানুপাতিক একটি বল, কণাটির সরল সমঞ্জস গতিতে বাধা দান করছে (চিত্র 2·10)। বায়ুর ঘর্ষণ-জনিত বাধা এরূপ বলের উদাহরণ। এখানে কণাটির উপর মোট দুটি বল ক্রিয়া করছে। এদের প্রথমটি মূলবিন্দু থেকে কণাটির দূরত্বের সমানুপাতিক এবং মূলবিন্দু অভিমুখী, যার মান 2.6 অনুচ্ছেদে (50) সমীকরণে ধরা হয়েছে $-kx$-এর সমান ($k > 0$)। এছাড়া এখন আর একটি বল ক্রিয়া করছে, যার মান $-k'v$ ($k' > 0$)-এর সমান, ধরা যাক। এই বলটি কণাটির বেগের বিপরীত মুখে ক্রিয়া করছে। কাজেই এক্ষেত্রে ক্রিয়াশীল মোট বল হ'ল

−kx−k′v
x
P
O
A
X
a

চিত্র 2·10—অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন।

$$F = -kx - k'v. \tag{69}$$

সুতরাং (1) অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k'v.$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, v-এর স্থলে $\dfrac{dx}{dt}$ লিখে, পক্ষান্তর দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{70a}$$

যেখানে

$$\frac{1}{\tau} = \frac{k'}{m} > 0, \text{ এবং } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{70b}$$

এখানে লক্ষ্য করার বিষয় যে τ সময়ের মাত্রাবিশিষ্ট একটি পরামাত্রা।* τ-কে

---

* $k'v$ বল ব'লে তার মাত্রা হ'ল $\dfrac{ML}{T^2}$, আর v-এর মাত্রা হ'ল $\dfrac{L}{T}$· কাজেই $[k']$ দ্বারা k'-এর মাত্রা সূচিত করলে, দেখা যায়

$$\frac{ML}{T^2} = [k']\frac{L}{T}, \text{ অর্থাৎ } [k'] = \frac{M}{T}.$$

সুতরাং (70b) থেকে দেখা যায় $[\tau] = T$.

প্রথম সময় বলে অভিহিত করা হয়। লক্ষ্য করার বিষয় যে $\tau >> 1$ হলে অবমন্দন স্বল্প হবে।

(70*a*) একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ, যার সহগগুলি অচর। $x=c\,e^{nt}$ ধ'রে উপরিপাত নীতির সাহায্যে এর সমাধান পাওয়া যায়। এখানে, আমরা দেখি, সহায়ক সমীকরণ হ'ল

$$n^2+\frac{1}{\tau}n+\omega^2=0.$$

দ্বিঘাত সমীকরণ-রূপে সমাধান করলে আসে

$$n=-\frac{1}{2\tau}\pm\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega^2}.$$

অতএব, (70*a*)-এর সাধারণ সমাধান হ'ল

$$x=c_1\;e^{\left[-\frac{1}{2\tau}+\left(\frac{1}{4\tau^2}-\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]t}$$
$$+c_2\;e^{\left[-\frac{1}{2\tau}-\left(\frac{1}{4\tau^2}-\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]t},\;\;\frac{1}{4\tau^2}\neq\omega^2, \tag{71a}$$

যেখানে c_1, c_2 অচর। আর $\frac{1}{4\tau^2}=\omega^2$ হলে, সাধারণ সমাধান আসে

$$x=e^{-\frac{t}{2\tau}}(c_1+c_2t),\;\;\frac{1}{4\tau^2}=\omega^2 \tag{71b}$$

যেখানে c_1, c_2 অচর। (71*b*) থেকে দেখা যাচ্ছে $\frac{1}{4\tau^2}=\omega^2$ ক্ষেত্রে, কণাটির গতি কিন্তু দোলনগতি নয়। সময় বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে কণাটির গতি থেমে আসে। আবার $\frac{1}{4\tau^2}\lessgtr\omega^2$ অনুযায়ী (71*a*)-কে দুটি ভিন্ন রূপে প্রকাশ করা যায়।

ক্ষেত্র (ক) : $\frac{1}{4\tau^2}<\omega^2$—এই ক্ষেত্রটিকে স্বল্প অবমন্দনের ক্ষেত্র বলে। এখানে, ধরা যাক

$$\omega^2-\frac{1}{4\tau^2}=\omega'^2>0.\;\;\text{কাজেই}\;\left(\frac{1}{4\tau^2}-\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}=i\omega', \tag{72}$$

যেখানে $i=\sqrt{-1}$. তাহলে (71a)-কে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$x=e^{-\frac{t}{2\tau}}[c_1 e^{i\omega' t}+c_2 e^{-i\omega' t}]$$

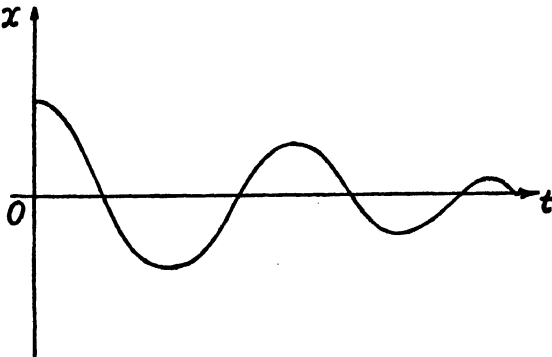
$$=e^{-\frac{t}{2\tau}}[c_1(\cos\omega' t+i\sin\omega' t)+c_2(\cos\omega' t-i\sin\omega' t)]$$

ডানদিককে সরল করলে আসে

$$x=\mathrm{A}\,e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega' t+\varepsilon), \tag{73}$$

যেখানে A এবং ε দুটি নতুন অচর, যাদের মান হ'ল

$$\mathrm{A}\cos\varepsilon=c_1+c_2 \quad \text{এবং} \quad -\mathrm{A}\sin\varepsilon=i(c_1-c_2).$$

সরল সমঞ্জস দোলনের সাধারণ সমীকরণ (58a)-এর সঙ্গে (73)-এর তুলনা করলে দেখা যায়, এক্ষেত্রে কণাটির গতি একটি সরল সমঞ্জস দোলন, যার বিস্তার সময়ের ফাংশন এবং সময়ের সঙ্গে সূচক-ফাংশনের ন্যায় হ্রাস পায়, অর্থাৎ দীর্ঘ সময় পরে, প্রায় কোন দোলন থাকে না। (72) থেকে দেখা যায় কণাটির অবমন্দিত দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক ω', অবমন্দনহীন প্রাকৃত বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক ω থেকে ক্ষুদ্র। অসীম শ্লথন সময়েই কেবল অবমন্দিত এবং প্রাকৃত বৃত্তীয় কম্পাঙ্কদ্বয় সমান হবে, আর (70b) থেকে দেখা যায়, তখন অবমন্দন জনিত বল শূন্য হয়, অর্থাৎ কোন অবমন্দন থাকে না। উপরন্তু, অবমন্দন যদি খুব অল্প হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{4\tau^2}\ll\omega^2$, সেক্ষেত্রে $\omega'\approx\omega$ (ω' এবং ω প্রায়

চিত্র 2·11—স্বল্প অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন

সমান), অর্থাৎ অবমন্দিত এবং প্রাকৃত বৃত্তীয় কম্পাঙ্কদ্বয় প্রায় সমান। এরূপ অবমন্দিত দোলনের চিত্র 2·11-এ দেখান হয়েছে। সময় বৃদ্ধির সঙ্গে কণাটির দোলনের বিস্তার এবং বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক হ্রাস পায়।

ক্ষেত্র (খ) : $\frac{1}{4\tau^2} > \omega^2$—**এই ক্ষেত্রটিকে বৃহৎ অবমন্দনের ক্ষেত্র** বলা হয়।

এখানে ধরা যাক

$$\left(\frac{1}{4\tau^2}-\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}=\bar{\omega}.$$

এক্ষেত্রে $\frac{1}{2\tau} > \omega$, এবং $(71a)$-কে সরল ক'রে লেখা যায়

$$x=c_1e^{-\left(\frac{1}{2\tau}-\bar{\omega}\right)t}+c_2e^{-\left(\frac{1}{2\tau}+\bar{\omega}\right)t} \tag{74}$$

এক্ষেত্রে কোন দোলন থাকে না। উপরন্তু, সময় t বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে ডানদিকের উভয়পদই ক্ষুদ্র হতে থাকে এবং শূন্যের দিকে গমন করে, অর্থাৎ তখন আর কোন গতি থাকে না।

উপরের আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে, অবমন্দন স্বল্প হলেই কেবল কণাটির গতি দোলনগতি হতে পারে। অবমন্দনের ফলে কণাটির গতি ধীরে ধীরে থেমে আসে, আর বৃহৎ অবমন্দনের ক্ষেত্রে গতি দ্রুত থেমে আসে।

2·9. প্রণোদিত দোলন—ঋজুরেখায় সরল সমঞ্জস দোলনশীল কণার উপর আর একটি বল ক্রিয়া করছে। বলটি সময়ের সঙ্গে পর্যাবৃত্ত-রূপে পরিবর্তনশীল। কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে।

এক্ষেত্রে কণাটির উপর মোট দুটি বল ক্রিয়া করছে। এদের মধ্যে একটির পরিমাণ, ইতিপূর্বে $-kx$ $(k > 0)$ ধরা হয়েছে। অপর বলটি ধরা যাক $F_0 \sin pt$ যেখানে F_0 অচর। তাহলে (1) অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+F_0 \sin pt.$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, এবং $\frac{k}{m}=\omega^2$ ও $\frac{F_0}{m}=f$ লিখলে আসে

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=f\sin pt. \tag{75}$$

(75) একটি রৈখিক দ্বিতীয় ক্রমের সাধারণ অসমসত্ত্ব অবকলন সমীকরণ, যার সাধারণ সমাধান নির্ণয়ের জন্য একটি বিশেষ সমাধান জানা আবশ্যক। ধরা যাক,

$$x=c\sin\lambda t, \tag{76}$$

যেখানে λ ও c অচর, এমন একটি সমাধান। তাহলে (75) থেকে দেখা যায়

$$-c\lambda^2\sin\lambda t+\omega^2c\sin\lambda t=f\sin pt.$$

কাজেই, $\lambda=p$ এবং $c=\frac{f}{\omega^2-p^2}$, $(\omega\neq p)$-এর জন্য (76) এরূপ একটি বিশেষ সমাধান। সুতরাং (75)-এর সাধারণ সমাধান, উপরিপাত নীতি অনুযায়ী আসে,

$$x=A\cos(\omega t+\varepsilon)+\frac{f}{\omega^2-p^2}\sin pt\quad \omega\neq p, \tag{77}$$

যেখানে A এবং ε অচর, যাদের মান প্রদত্ত আদি দশার সাহায্যে নির্ধারণ করা যাবে। (77) থেকে দেখা যাচ্ছে, কণাটির গতি এক্ষেত্রে দুটি সরল সমঞ্জস দোলনের লব্ধি, যাদের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক যথাক্রমে ω এবং p. ইতিপূর্বে 2·6 অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি, পর্যাবৃত্ত বল $F_0\sin pt$ উপস্থিত না থাকলে, কণাটির গতি হয় সরল সমঞ্জস দোলন, যার বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক হ'ল ω. এই দোলনটিকে **মুক্ত দোলন** বলা হয়। (77)-এর ডান দিকের দ্বিতীয় পদ, p বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক-বিশিষ্ট সরল সমঞ্জস দোলন রূপায়িত করে। এই দোলনটিকে **প্রণোদিত দোলন** বলে। প্রণোদিত দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক ক্রিয়াশীল পর্যাবৃত্ত বলের বৃত্তীয় কম্পাঙ্কের সমান।

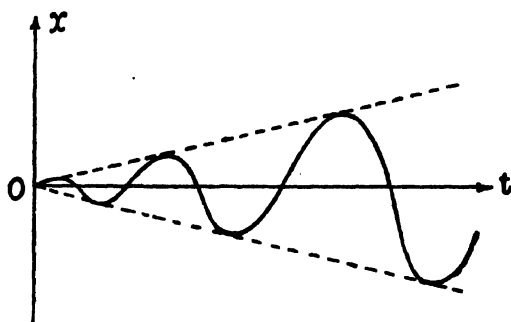
যদি $\omega=p$ হয়, তাহলে (75)-এর সাধারণ সমাধান (77) হবে না। এক্ষেত্রে একটি পরীক্ষামূলক সমাধান, ধরা যাক

$$x=ct\cos\lambda t.$$

তাহলে (75) থেকে পাওয়া যায়

$$-2\lambda c \sin \lambda t-\lambda^2 ct \cos \lambda t+\omega^2 ct \cos \lambda t=f \sin \omega t.$$

এখান থেকে দেখা যাচ্ছে, $\lambda=\omega$ এবং $c=-\frac{f}{2\omega}$. কাজেই (75)-এর সাধারণ সমাধান হ'ল

$$x=\mathrm{A} \cos (\omega t+\varepsilon)-\frac{f}{2\omega} t \cos \omega t, \quad \omega=p. \tag{78}$$

চিত্র 2·12—প্রণোদিত ও মুক্ত দোলনের অনুনাদ

ডানদিকের প্রথম পদটি ω বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক-বিশিষ্ট প্রাকৃত দোলন রূপায়িত করে, আর দ্বিতীয় পদটি $\frac{f}{2\omega}t$ বিস্তার-বিশিষ্ট প্রণোদিত দোলন রূপায়িত করে। এখানে, প্রণোদিত দোলনের বিস্তার সময়ের সঙ্গে সঙ্গে বৃদ্ধি পায় এবং এর কোন স্থির পর্যায়কাল নেই। ফলে (78)-এর দ্বিতীয় পদটি প্রথম পদের তুলনায় বৃহত্তর হতে থাকে। সময় t অসীম হলে বিস্তারও অসীম হবে। এই ক্ষেত্রটিকে মুক্ত ও প্রণোদিত দোলনের **অনুনাদ** বলা হয়, এবং এক্ষেত্রে প্রাকৃত ও প্রণোদিত কম্পাঙ্ককে **অনুনাদ কম্পাঙ্ক** বলা হয় (চিত্র 2·12)। শব্দতত্ত্ব, তাড়িৎ-চুম্বক-তত্ত্ব প্রভৃতি বিভিন্ন তত্ত্বে অনুনাদ গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে। এখানে অবশ্য বলা দরকার যে প্রকৃতপক্ষে অনুনাদের ক্ষেত্রে বিস্তার অসীম হয় না,—কারণ বিস্তার যদি বৃহৎ হয় তবে (75)-এর ন্যায় কোন রৈখিক অবকল সমীকরণ দ্বারা কণাটির গতীয় সমীকরণ সঠিকভাবে রূপায়িত হয় না,—সমীকরণটিতে আরও অরৈখিক পদ আসে, যা উপরের আলোচনায় আমরা গ্রাহ্য করিনি। অনুনাদের ফলে বাস্তবে অনেক ক্ষয়-ক্ষতি ঘটতে পারে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, কোন সৈন্যদল যখন

একটি সাঁকো অতিক্রম করে, তখন সাধারণতঃ তাদের কদম মিলিয়ে চলতে নিষেধ করা হয়। কারণ, যদি সাঁকোটির প্রাকৃত কম্পন সৈন্যদের কদম মিলিয়ে চলার ফলে উদ্ভূত কম্পনের সমান হয়, তবে অনুনাদ সৃষ্টি হবে, এবং সাঁকোটির কম্পনের বিস্তার বাড়তে বাড়তে সাঁকোটি ভেঙ্গে যাবে।

শুধু প্রণোদিত দোলন আলোচনার পর এবার **অবমন্দিত প্রণোদিত দোলন** আলোচিত হবে। এক্ষেত্রে কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k'v + F_0 \sin pt.$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, v-এর স্থলে $\frac{dx}{dt}$ লিখে পক্ষান্তর দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \sin pt, \tag{79a}$$

যেখানে

$$\frac{1}{\tau} = \frac{k'}{m} > 0, \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \text{ এবং } f = \frac{F_0}{m}. \tag{79b}$$

পূর্বের ন্যায় এবারেও একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অসমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ পাওয়া গেল। (79a)-এর সাধারণ সমাধান হ'ল সম্পূরক ও সহায়ক ফাংশনের উপরিপাত। সম্পূরক ফাংশনটি হ'ল

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0,$$

সমীকরণের সাধারণ সমাধান, যার মান (71a) এবং (71b) দ্বারা ইতিপূর্বে প্রদত্ত হয়েছে। [(71a)-এর সরলীকৃত রূপ হ'ল (73) এবং (74). (71b) সমাধানটি বর্তমান আলোচনায় গুরুত্বহীন।] আর সহায়ক ফাংশন হ'ল

$$x = \frac{1}{D^2 + \frac{1}{\tau}D + \omega^2} f \sin pt, \tag{80}$$

যেখানে $D \equiv \frac{d}{dt}$. অবকল সমীকরণের সুপরিচিত সূত্র অনুযায়ী (80) থেকে পাওয়া যায়

$$x=f\frac{1}{\omega^2-p^2+\frac{1}{\tau}D}\sin pt=f\cdot\frac{(\omega^2-p^2)-\frac{1}{\tau}D}{(\omega^2-p^2)^2-\frac{1}{\tau^2}D^2}\sin pt$$

$$=\frac{f}{(\omega^2-p^2)^2+\frac{1}{\tau^2}p^2}\cdot\left\{(\omega^2-p^2)-\frac{1}{\tau}D\right\}\sin pt,$$

অর্থাৎ

$$=\frac{f\left[(\omega^2-p^2)\sin pt-\frac{p}{\tau}\cos pt\right]}{(\omega^2-p^2)^2+\frac{1}{\tau^2}p^2}.$$

এখানে

$$\tan\varphi=\frac{p/\tau}{p^2-\omega^2} \tag{81a}$$

ধরলে, ডানদিক সরল ক'রে সহায়ক ফাংশন আসে

$$x=\frac{f}{\left[(\omega^2-p^2)^2+\frac{1}{\tau^2}p^2\right]^{1/2}}\sin(pt+\varphi), \tag{81b}$$

সুতরাং, স্বল্প বা বৃহৎ অবমন্দন অনুযায়ী (73) বা (74)-এর সঙ্গে (81*b*) উপরিপাত করে (79*a*)-এর নিম্নলিখিত সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় ঃ

$$x=Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega' t+\varepsilon)$$

$$+\frac{f}{\left[(\omega^2-p^2)^2+\frac{1}{\tau^2}p^2\right]^{1/2}}\sin(pt+\varphi),\ \frac{1}{4\tau^2}<\omega^2, \tag{82a}$$

$$x=c_1e^{-\left(\frac{1}{2\tau}-\bar{\omega}\right)t}+c_2e^{-\left(\frac{1}{2\tau}+\bar{\omega}\right)t}$$

$$+\frac{f}{\left[(\omega^2-p^2)^2+\frac{1}{\tau^2}p^2\right]^{1/2}}\sin(pt+\varphi),\ \frac{1}{4\tau^2}>\omega^2 \tag{82b}$$

(82a) থেকে দেখা যায় $\frac{1}{4\tau^2} < \omega^2$ হলে, অর্থাৎ স্বল্প অবমন্দনের ক্ষেত্রে কণাটির গতি দুটি সরল সমঞ্জস দোলনের লব্ধি, যাদের বিস্তার যথাক্রমে $Ae^{-\frac{t}{2\tau}}$ এবং $f\Big/\left[(\omega^2 - p^2)^2 + \frac{1}{\tau^2}p^2\right]^{1/2}$,

এবং বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক যথাক্রমে ω' এবং p. ইতিপূর্বে আমরা দেখেছি ω' হ'ল অবমন্দিত মুক্ত দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক, আর p হ'ল প্রণোদিত দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক। অবমন্দিত মুক্ত দোলনের বিস্তার $Ae^{-t/2\tau}$ হওয়ার ফলে সময় বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে এই অংশটি ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর হয়, এবং কালক্রমে এই অবমন্দিত মুক্ত দোলনটির মৃত্যু ঘটে। অবশিষ্ট থাকে শুধু p বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট প্রণোদিত দোলন। লক্ষ্য করার বিষয়, যে দীর্ঘ সময় পরে অবশিষ্ট এই প্রণোদিত দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক ক্রিয়াশীল পর্যাবৃত্ত বলের বৃত্তীয় কম্পাঙ্কের সমান। (82a)-এর ডানদিকের প্রথম পদটি ক্ষণস্থায়ী এবং এই পদটিকে উপরোক্ত সমাধানের **ক্ষণস্থায়ী অংশ** বলা হয়। আর দ্বিতীয় পদটি হ'ল **নিয়ত-দশা** সমাধান, দীর্ঘ সময় পরে যার মৃত্যু ঘটে না। প্রয়োগের দিক থেকে দেখলে, এই স্বল্প অবমন্দনের ক্ষেত্রটি খুব গুরুত্বপূর্ণ।

যদি $p = \omega$ হয়, তবে (81a) থেকে দেখা যায় $\varphi = \frac{\pi}{2}$, এবং প্রণোদিত দোলনের মান হয় $\frac{f\tau}{\omega}\cos\omega t$. স্বল্প অবমন্দনের ক্ষেত্রে ($\tau >> 1$) এই মান বৃহৎ হতে পারে। এই ক্ষেত্রটি **অনুনাদ** রূপায়িত করে।

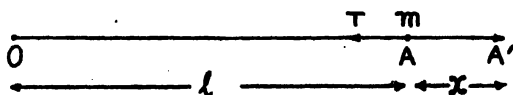
আবার $\frac{1}{4\tau^2} > \omega^2$ হলে, (82b)-এর ডানদিকের প্রথম দুটি পদ ক্ষণস্থায়ী এবং সময় বৃদ্ধির সঙ্গে উভয়ের মান শূন্যের দিকে ধাবিত হয়। দীর্ঘ সময় পরে শুধু তৃতীয় পদটি অবশিষ্ট থাকে, যা ক্রিয়াশীল পর্যাবৃত্ত বলের বৃত্তীয় কম্পাঙ্কের সমান বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক-বিশিষ্ট প্রণোদিত দোলন রূপায়িত করে।

2·10 স্থিতিস্থাপক রজ্জু ও স্প্রিং—কোন বস্তুর উপর বল ক্রিয়া করলে সাধারণতঃ বস্তুটির আকৃতি ও আয়তনের পরিবর্তন ঘটে এবং বস্তুটির অভ্যন্তরে প্রতিক্রিয়া জনিত বল সৃষ্ট হয়, যা বস্তুটিকে পূর্বাবস্থায় ফিরিয়ে আনতে সচেষ্ট হয়। ক্রিয়াশীল বল অপসারিত হলে যদি বস্তুটি পূর্বের আকৃতি ও আয়তন সম্পূর্ণরূপে ফিরে পায় তবে বস্তুটিকে স্থিতিস্থাপক

বলা হয়। প্রযুক্ত বল অতি বৃহৎ না হলে, বেশিরভাগ ধাতব বস্তুতে স্থিতিস্থাপকতা পরিলক্ষিত হয়।

কোন সরু ধাতব রজ্জুকে যদি দৈর্ঘ্য বরাবর সবলে টানা হয়, তবে রজ্জুটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায়। টানার ফলে, রজ্জুটির অভ্যন্তরে দৈর্ঘ্য বরাবর, প্রতিক্রিয়া-জনিত ক্রিয়াশীল বলের বিপরীতমুখী যে বল সৃষ্ট হয়, তাকে টান বলে। **স্থিতিস্থাপক রজ্জুর প্রতি একক দৈর্ঘ্যের যে পরিমাণ বৃদ্ধি ঘটে, তা টানের সমানুপাতিক হয়।** টান অতি বৃহৎ না হলে, পরীক্ষা-মূলক উপায়ে এই নিয়মটির যথার্থতা প্রতিপন্ন হয়েছে। এই নিয়মটি **হুকের নিয়ম** নামে পরিচিত।

ধরা যাক, কোন স্থিতিস্থাপক রজ্জু OA-এর দৈর্ঘ্য l, যার A প্রান্তে একটি ভর m বাঁধা আছে এবং O প্রান্তটি স্থির (চিত্র 2·13)। দৈর্ঘ্য বরাবর বল-

চিত্র 2·13 স্থিতিস্থাপক রজ্জু

প্রয়োগের ফলে রজ্জুটি OA থেকে বেড়ে OA′ হ'ল। এই অবস্থায় রজ্জুটির টান T, A′O অভিমুখে ক্রিয়া করবে। যদি $OA = l$, এবং $OA' = l + x$ হয়, তবে প্রতি একক দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি $= \dfrac{OA' - OA}{OA} = \dfrac{x}{l}$.

কাজেই, হুকের নিয়ম অনুসারে টান হ'ল

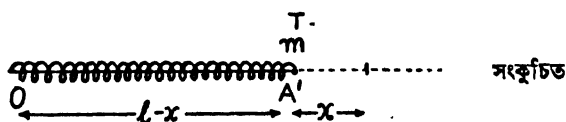
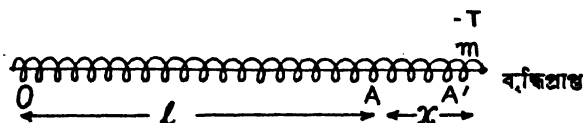
$$T = -\lambda \frac{x}{l}, \tag{83}$$

যেখানে λ (>0) একটি অচর। টান x-বৃদ্ধির বিপরীত মুখে ক্রিয়া করে ব'লে ঋণাত্মক চিহ্নটি দেওয়া হয়েছে। সাধারণতঃ, রজ্জুটি যে উপাদানে গঠিত তার উপর এবং রজ্জুটির আকৃতির উপর λ নির্ভরশীল। রজ্জুটির প্রস্থচ্ছেদ d যদি সুষম হয়, তবে (83)-কে লেখা যায়

$$\frac{T}{d} = -E \cdot \frac{x}{l}, \tag{83'}$$

যেখানে E (>0) একটি নতুন অচর, যার মান শুধুমাত্র রজ্জুটির উপাদানের উপর নির্ভরশীল। E-কে **ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক** বলা হয়। কারিগরী প্রয়োগে E-এর বহুল ব্যবহার দেখা যায়।

সাঁপল স্প্রিং-এর ক্ষেত্রেও হুকের নিয়ম খাটে, তবে এখানে, স্প্রিং-এর অক্ষরেখা বরাবর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করতে হবে (চিত্র $2{\cdot}14a$)। উপরন্তু স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে সংকোচনকারী বলের জন্যও এই নিয়ম খাটে (চিত্র $2{\cdot}14b$)। এক্ষেত্রে

প্রতি একক দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি $=\dfrac{\mathrm{OA}'-\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{l-x-l}{l}=-\dfrac{x}{l}$.

চিত্র $2{\cdot}14a$ ও চিত্র $2{\cdot}14b$—স্থিতিস্থাপক স্প্রিং।

কাজেই টান হ'ল

$$\mathrm{T}=-\lambda\left(-\frac{x}{l}\right)=\lambda\frac{x}{l},$$

যার মান ধনাত্মক। এক্ষেত্রে T বলকে সাধারণতঃ ঘাত বলা হয়।

স্থিতিস্থাপক রজ্জু বা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত স্প্রিং এর জন্য ভর m-এর সমীকরণ হ'ল, (1) অনুযায়ী

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l+x)=-\lambda\frac{x}{l}.$$

উভয়পক্ষকে সরল ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu x=0, \tag{84}$$

যেখানে $\mu=\dfrac{\lambda}{m}(>0)$. এই সমীকরণটি সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ (51) থেকে অভিন্ন ব'লে, $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ পর্যায়কাল-বিশিষ্ট একটি সরল সমঞ্জস গতি রূপায়িত করে।

সংকুচিত স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে, গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l-x)=\lambda\frac{x}{l}\cdot$$

উভয়পক্ষকে সরল ক'রে (84) ফিরে পাওয়া যায়। অর্থাৎ স্প্রিং বৃদ্ধিপ্রাপ্তই হ'ক আর সংকুচিতই হ'ক, উভয়ক্ষেত্রে একই গতীয় সমীকরণ আসে।

লক্ষ্য করা দরকার যে, স্থিতিস্থাপক রজ্জুর দৈর্ঘ্য হ্রাস পেতে পেতে যখন স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l-এ ফিরে আসে, তখন টান T-র মান শূন্য হয়। অতঃপর কিন্তু কণাটির উপর আর কোন বল ক্রিয়া করে না, এবং এই অবস্থায় কণাটির যে বেগ থাকে, তার দ্বারাই কণাটির গতি নির্ধারিত হয়।

2·11. দুটি কণার স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ—একই সরলরেখায় গমনকারী দুটি কণার সংঘর্ষ এখানে আলোচিত হবে। এরূপ সংঘর্ষ দু'রকমের হতে পারে—স্থিতিস্থাপক * এবং অস্থিতিস্থাপক। **স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে কণা-দুটির গতীয় শক্তির যোগফল সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে একই থাকে।** অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে গতীয় শক্তির কিয়দংশ কণাদ্বয়ের আভ্যন্তরীণ উদ্দীপনা শক্তির পরিবর্তনে ব্যয় হয়, যা সাধারণতঃ উত্তাপরূপে পুনরাবির্ভূত হয়।

ধরা যাক, কণা-দুটির ভর যথাক্রমে m ও m', অবস্থিতি x ও x' এবং

x, v $\quad$ x', v'

m $\quad$ m' $\quad \rightarrow X$

চিত্র 2·15—দুটি কণার সংঘর্ষ।

বেগ v ও v' (চিত্র 2·15)। সংঘর্ষের অব্যবহিত পরে বেগ যথাক্রমে v ও v' সংঘর্ষের ফলে ভরের পরিবর্তন ঘটে না, ধরা হ'ল। সংঘর্ষ স্থিতিস্থাপকই হ'ক আর অস্থিতিস্থাপকই হ'ক, উভয়ক্ষেত্রেই গতির তৃতীয় নিয়ম (1.52) অনুযায়ী

$$\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$$

* "স্থিতিস্থাপক" পদের স্থলে অনেক পুস্তকে "সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক" পদটি ব্যবহার করা হয়।

হবে। এখানে F_{12} হ'ল m'-এর উপর m-র ক্রিয়া, আর F_{21} হ'ল m-র উপর m'-র ক্রিয়া। সুতরাং বলের ঘাত I—সমপরিমাণ ও বিপরীতমুখী হবে। অতএব (2·13) থেকে, কণাদ্বয়ের ভরবেগ পরিবর্তনের জন্য আসে

$$m\,(V-v)=I=-m'\,(V'-v'). \qquad (85a)$$

পক্ষান্তর করলে পাওয়া যায়

$$mV+m'V'=mv+m'v' \qquad (85b)$$

(85b) থেকে দেখা যায়, সংঘর্ষের পূর্বে কণাদ্বয়ের ভরবেগের যোগফল, সংঘর্ষের পরবর্তী ভরবেগের যোগফলের সমান—অর্থাৎ **মোট (রৈখিক) ভরবেগ সংরক্ষিত হয়।**

সংঘর্ষের অব্যবহিত পূর্বে ও পরে কণাদ্বয়ের ভরকেন্দ্র $\bar{x}$ এবং X হলে

$$\bar{x}=\frac{mx+m'x'}{m+m'},\ \text{ও}\ X=\frac{mX+m'X'}{m+m'} \qquad (86)$$

যেহেতু $\dot{x}=v,\ \dot{x}'=v'$, ও $\dot{X}=V,\ \dot{X}'=V'$, অতএব (86)-কে (85)-তে বসিয়ে সরল করলে আসে

$$\dot{\bar{X}}=\dot{\bar{x}} \qquad (87)$$

অর্থাৎ সংঘর্ষের পূর্বে ভরকেন্দ্রের বেগ যা ছিল, পরেও তাই থাকে।

স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে মোট গতীয় শক্তি সংরক্ষিত হয়। আলোচ্য সংঘর্ষ স্থিতিস্থাপক ধ'রে, আমরা পাই

$$\tfrac{1}{2}mv^2+\tfrac{1}{2}m'v'^2=\tfrac{1}{2}mV^2+\tfrac{1}{2}m'V'^2$$

উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ ক'রে ও পক্ষান্তর ক'রে আসে

$$m(V^2-v^2)=-m'(V'^2-v'^2) \qquad (88)$$

(85a) দ্বারা (88)-কে ভাগ করলে আসে

$$V+v=V'+v',$$

অথবা,

$$V-V'=-(v-v'), \qquad (89)$$

অর্থাৎ সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে, কণাদ্বয়ের আপেক্ষিক বেগ পরস্পর

সমপরিমাণ কিন্তু বিপরীতমুখী। একঘাতী সমীকরণ (85b) এবং (89)-তে V এবং V′ অজ্ঞাত রাশি। সমীকরণদ্বয়ের একমাত্র সমাধান হ'ল

$$V = \frac{m' - m}{m + m'}\, v + \frac{2m'}{m + m'}\, v'$$

$$V' = \frac{2m}{m + m'}\, v + \frac{m' - m}{m + m'}\, v'.$$

যদি কণাদ্বয় সমান ভর বিশিষ্ট হয়, তবে $m = m'$ এবং (90) থেকে পাওয়া যায়

$$V = v',\ V' = v \tag{91}$$

এখান থেকে দেখা যাচ্ছে, যদি $v = 0$ হয় তবে $V = v'$ ও $V' = 0$, —অর্থাৎ প্রথম কণাটি সংঘর্ষের পূর্বে স্থির থাকলে, সংঘর্ষের পরে তার বেগ হয়, দ্বিতীয় কণাটির সংঘর্ষ-পূর্ব বেগ এবং সংঘর্ষের ফলে দ্বিতীয় কণাটি স্থির হয়ে যায়। এক্ষেত্রে দ্বিতীয় কণাটি তার সমগ্র ভরবেগ প্রথম কণাকে সমর্পণ করে।

লক্ষ্য করার বিষয় যে (রৈখিক) ভরবেগ সংরক্ষণের নিয়ম (85b), গতির তৃতীয় নিয়মের সাহায্যে প্রতিষ্ঠিত হয়েছে। ইতিপূর্বে বলা হয়েছে, পরমাণু সংঘর্ষের ন্যায় কোন কোন ক্ষেত্রে গতির তৃতীয় নিয়ম সঠিকভাবে প্রযোজ্য নয়। **সেক্ষেত্রেও কিন্তু ভরবেগ সংরক্ষণের নিয়ম সঠিক, —স্থিতিস্থাপক ও অস্থিতিস্থাপক উভয় ক্ষেত্রেই।** গ্যালিলীয় নিত্যতা ও গতীয় শক্তি সংরক্ষণের নিয়মের সাহায্যে ভরবেগ সংরক্ষণের নিয়ম প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

দুটি কণার সংঘর্ষ-বিষয়ক আলোচনা গ্যাসের গতিকতত্ত্বে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে।

2.12. ভরের পরিবর্তন সমন্বিত গতি—এপর্যন্ত যেসকল গতির সমস্যা আলোচনা করা হয়েছে, তাতে গতির সঙ্গে সঙ্গে কণার ভরের কোন পরিবর্তন ঘটেনি। কিন্তু গতির সঙ্গে ভরের পরিবর্তন ঘটছে এমন উদাহরণ অনেক সময় দেখতে পাওয়া যায়, যেমন—রকেটের গতি। রকেটের অভ্যন্তরে অবস্থিত বারুদের একটা অংশ অনবরত পুড়ে বাইরে বেরিয়ে আসে, যার ফলে গতির সঙ্গে সঙ্গে রকেটের ভর কমতে থাকে। বৃষ্টির ফোঁটা নিচে পড়ার সময় বায়ুমণ্ডল থেকে জলীয় বাষ্প আহরণ ক'রে ভারী হতে

থাকে,—এমনি অনেক উদাহরণ আমাদের জানা আছে। এরূপ ক্ষেত্রে গতীয় সমীকরণ লেখার সময়, ভরের পরিবর্তনের ফলে ভরবেগের যে পরিবর্তন ঘটছে তা হিসাবের মধ্যে ধরতে হবে।

ধরা যাক, সময় t-তে কণাটির ভর m, এবং x-বৃদ্ধির দিশায় বেগ v. অমিতক্ষুদ্র সময় Δt পরে, u-বেগে গমনশীল কোন অমিতক্ষুদ্র ভর Δm বাইরে থেকে এসে কণাটির সঙ্গে যুক্ত হ'ল—অর্থাৎ $t+\Delta t$ সময়ে কণাটির ভর হ'ল $m+\Delta m$ এবং বেগ হল $(v+\Delta v)$. x-বৃদ্ধির দিশায় ক্রিয়াশীল বল যদি F হয়, তবে Δt সময়ে F-র জন্য ভরবেগ পরিবর্তনের মান হ'ল $\mathrm{F}.\Delta t$. এতদ্ব্যতীত, বহিঃস্থ u-বেগে গমনশীল অমিতক্ষুদ্র ভর Δm-এর জন্য ভরবেগের পরিবর্তন হল $u.\Delta m$. সুতরাং,

$$(m+\Delta m)(v+\Delta v)-m.v-u.\Delta m=\mathrm{F}\cdot\Delta t \qquad (92)$$

সরল ক'রে, এবং উভয়পক্ষকে Δt দ্বারা ভাগ ক'রে পাওয়া যায়

$$v\frac{\Delta m}{\Delta t}+m\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta m+u\frac{\Delta m}{\Delta t}=\mathrm{F}.$$

$\Delta t\to 0$ সীমান্ত মান গ্রহণ করলে, বাঁদিকের তৃতীয় পদের মান শূন্য হয়, কারণ $\frac{dv}{dt}$-এর মান সসীম এবং $\Delta m\to 0$. আমরা পাই

$$v\frac{dm}{dt}+m\frac{dv}{dt}+u\frac{dm}{dt}=\mathrm{F},$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$\frac{d}{dt}(mv)=\mathrm{F}+u\frac{dm}{dt}. \qquad (93)$$

রকেটের ক্ষেত্রে পোড়া বারুদ রকেটের গতির বিপরীতমুখে গমন করে (চিত্র 2·16)। ধরা যাক, রকেট-সাপেক্ষে নির্গমনকারী পোড়া বারুদের

চিত্র 2·16—রকেটের গতি।

বেগ হ'ল u. কাজেই x-বৃদ্ধির দিশায় অমিতক্ষুদ্র Δm পরিমাণ নির্গমনকারী পোড়া বারুদের বেগ হ'ল $(v-u)$, যার ভরবেগ হ'ল x-বৃদ্ধির দিশায় $\Delta m(v-u)$.

পোড়া বারুদ এই পরিমাণ ভরবেগ সঙ্গে নিয়ে বাইরে বেরিয়ে যাচ্ছে। কাজেই $t+\Delta t$ সময়ে পোড়া বারুদ ও রকেটের সম্মিলিত ভরবেগ হ'ল

$$(m-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u).$$

সুতরাং Δt সময়ে ভরবেগ বৃদ্ধির সমীকরণ হ'ল, (92)র স্থলে

$$[(m-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u)]-mv=\mathrm{F}.\Delta t \tag{94}$$

পূর্বের ন্যায় সরল ক'রে ও $\Delta t \to 0$ সীমান্ত মান গ্রহণ ক'রে পাওয়া যায়

$$m\frac{dv}{dt}-u\frac{dm}{dt}=\mathrm{F}. \tag{95}$$

এই সমীকরণটি সমাধানের জন্য $\dfrac{dm}{dt}$ এবং u-এর মান প্রদত্ত হওয়া প্রয়োজন।

উদাহরণ 9. পৃথিবী স্বীয় অভ্যন্তরস্থ কোন কণাকে যে বল দ্বারা আকর্ষণ করে তার পরিমাণ ভূ-কেন্দ্র থেকে কণাটির দূরত্বের সমানুপাতিক ধ'রে দেখাতে হবে যে ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত যে কোন এক বিন্দু থেকে অপর কোন বিন্দু পর্যন্ত একটি ঋজু মসৃণ বায়ুহীন সুড়ঙ্গ তৈরি ক'রে একটি কণাকে একপ্রান্তে ছেড়ে দিলে অপর প্রান্তে পৌঁছাতে প্রায় পৌনে এক ঘণ্টা সময় লাগবে।

ভূ-পৃষ্ঠে A এবং B দুটি বিন্দু যোগ ক'রে মসৃণ বায়ুহীন সুড়ঙ্গ তৈরি হয়েছে। সুড়ঙ্গটির মধ্যবিন্দু M এবং O বিন্দু ভূ-কেন্দ্র। কণাটিকে A বিন্দুতে ছেড়ে দিলে কণাটি সুড়ঙ্গ পথে AB অভিমুখে গমন করবে, কারণ কণাটির উপর পৃথিবীর আকর্ষণ-জনিত বল $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ দিশায় ক্রিয়া করে এবং $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ দিশায় ঐ বলের উপাংশ ক্রিয়া করছে। ধরা যাক, t-সময়ে কণাটি M বিন্দু থেকে x-দূরত্বে P বিন্দুতে অবস্থিত, যেখানে

$OP = r$. তাহলে, কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল $m\mu r$, $\overrightarrow{PO}$ দিশায় ক্রিয়া করছে, যেখানে m কণাটির ভর এবং $\mu(>0)$ সমানুপাত-জনিত অচর সূচিত করে। $\overrightarrow{MP}$ অভিমুখে এই বলের উপাংশের মান

$$-m\mu r \cos OPM = -m\mu r.\frac{x}{r} = -m\mu x.$$

কাজেই, $\overrightarrow{MP}$ দিশায় কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\mu x$$

অর্থাৎ $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x.$$

এটি একটি সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ। সুতরাং, কণাটি AB সুড়ঙ্গ পথে সরল সমঞ্জস গতিতে যাতায়াত করবে, যার পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. অতএব A থেকে B পর্যন্ত গমন করতে প্রয়োজনীয় সময় হ'ল $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$.

কিন্তু, ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত কোন বিন্দুতে, যেমন B বিন্দুতে, কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল কণাটির ওজনের সমান। অর্থাৎ,

$$m\mu a = mg, \text{ অর্থাৎ } \mu = \frac{g}{a}$$

যেখানে a পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। সুতরাং,

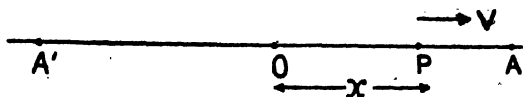
$$\text{নির্ণেয় } \quad \text{সময়} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6{\cdot}37 \times 10^8}{980}} \text{ সেকেণ্ড,}$$

যেখানে পৃথিবীর গড় ব্যাসার্ধ $a = 6{\cdot}37 \times 10^8 cm$, এবং $g = 980\ cm/s^2$ ধরা হয়েছে। ধ্রুবক π-এর মান আসন্নভাবে $3{\cdot}14$ ধ'রে, উপরের মান সরল ক'রে পাওয়া যায়

নির্ণেয় সময় $= 42$ মিনিট প্রায়।

আসন্নভাবে এই মান প্রায় পৌনে এক ঘণ্টা।

উদাহরণ 10. একটি কণা সরলরেখায় O বিন্দু সাপেক্ষে T পর্যায়কাল বিশিষ্ট দোলনগতিতে যাতায়াত করছে। কোন বিন্দু P দিয়ে যাওয়ার সময় $\overrightarrow{OP}$

দিশায় কণাটির বেগ V. পুনরায় P বিন্দুতে ফিরে আসতে কণাটির যে সময়ের প্রয়োজন, তা নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, কণাটি O বিন্দু সাপেক্ষে A′ থেকে A পর্যন্ত দোলনগতিতে যাতায়াত করছে এবং t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি P, যেখানে $OP = x$. কণাটির বিস্তার $OA = OA' = a$ ধরা হ'ল। তাহলে t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি x ও বেগ v-র সম্বন্ধ হ'ল

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T} t. \qquad \text{(i)}$$

$$v = -a \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t \qquad \text{(ii)}$$

কণাটির বিস্তার a ধরার ফলে A ও A′ বিন্দুতে কণাটির বেগ শূন্য। (i) অনুযায়ী, আদি সময় $t = 0$-তে কণাটি A বিন্দুতে ছিল। গতির প্রতিসাম্য থেকে বলা যায় A থেকে P বিন্দু পর্যন্ত আসতে কণাটির যে সময়ের প্রয়োজন, P থেকে A পর্যন্ত যেতেও ঠিক একই সময়ের প্রয়োজন। কিন্তু A থেকে P পর্যন্ত আসতে সময় লাগে t. কাজেই P থেকে A পর্যন্ত গিয়ে আবার P বিন্দুতে ফিরে আসতে সময় লাগে $2t$.

প্রদত্ত সর্তানুসারে $\overrightarrow{OP}$ দিশায় P বিন্দুতে কণাটির বেগ V. কিন্তু, A থেকে P বিন্দুতে আসার সময় বেগ $\overrightarrow{PO}$ দিশায় লক্ষ্য ক'রে, আমরা দেখি

$$V = -v,$$

অর্থাৎ
$$V = a \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t \qquad \text{(iii)}$$

(iii) র উভয়পক্ষকে (i) দ্বারা ভাগ ক'রে আসে

$$\tan \frac{2\pi}{T} t = \frac{VT}{2\pi x}.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সময়

$$2t=\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\frac{VT}{2\pi x}.$$

উদাহরণ 11. একটি হাল্কা, সরু স্থিতিস্থাপক রজ্জুর এক প্রান্তে m ভর বিশিষ্ট একটি কণা যুক্ত আছে এবং অপর প্রান্ত O স্থির রাখা হয়েছে। রজ্জুটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l_0 এবং স্থিতিস্থাপক-গুণাংক mg. O বিন্দু থেকে $\frac{l_0}{2}$ নীচে কণাটিকে ছেড়ে দেওয়া হ'ল। আদি অবস্থিতিতে ফিরে আসতে কণাটির যে সময় লাগে তা নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক রজ্জুটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য $OA=l_0$. রজ্জু OAর মধ্যবিন্দু B থেকে আদি অবস্থায় কণাটিকে ছেড়ে দেওয়া হ'ল। তাহলে B থেকে A বিন্দু পর্যন্ত কণাটির মাধ্যাকর্ষণ জনিত অবাধ পতন ঘটবে। অতঃপর রজ্জুটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি প্রাপ্ত হবে এবং কোন অবস্থিতি P-তে টান T, PAO অভিমুখে ক্রিয়া করবে। এতদ্ব্যতীত, কণাটির ওজন mg নিম্নাভিমুখে ক্রিয়া করবে।

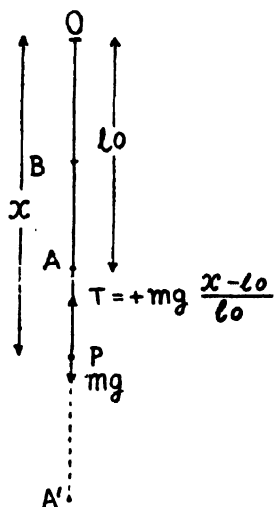
B থেকে A পর্যন্ত মুক্ত পতনে প্রয়োজনীয় সময় t_1 হলে,

$$\frac{l_0}{2}=BA=0+\tfrac{1}{2}gt_1^2$$

অতএব, $t_1=\sqrt{\frac{l_0}{g}}$

A বিন্দুতে কণাটির বেগ $\overrightarrow{OA}$ অভিমুখে v_1 হলে

$$v_1=0+gt_1=g\sqrt{\frac{l_0}{g}}=\sqrt{gl_0}. \qquad \text{(i)}$$

A বিন্দুর নীচে কণাটি যখন কোন বিন্দু P-তে অবস্থিত, তখন কণাটির

উপর ক্রিয়াশীল টান T-র পরিমাণ হ'ল

$$T = +mg\frac{x-l_0}{l_0},$$

এবং দিশা $\overrightarrow{PO}$ অভিমুখে, যেখানে $OP = x$. সুতরাং x-বৃদ্ধি অভিমুখে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল মোট বল হ'ল

$$mg\frac{x-l_0}{l_0} + mg = -\frac{mg}{l_0}(x-2l_0).$$

সুতরাং কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{g}{l_0}(x-2l_0).$$

উভয় পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে আসে

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l_0}(x-2l_0),$$

যা সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ। এই সমীকরণের সাধারণ সমাধান হ'ল

$$x - 2l_0 = c_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t. \qquad \text{(ii}a\text{)}$$

$$\text{এবং } v = \frac{dx}{dt} = -c_1\sqrt{\frac{g}{l_0}}\sin\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t$$

$$+c_2\sqrt{\frac{g}{l_0}}\cos\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t. \qquad \text{(ii}b\text{)}$$

যেখানে c_1, c_2 সমাকলন অচর। কণাটি যখন A বিন্দুতে অবস্থিত ছিল, তৎপরবর্তী গতির জন্য সময়কে সেই মুহূর্ত থেকে পরিমাপ করলে,

$$t = 0,\ x = l_0,\ v = v_1 = \sqrt{gl_0}$$

(ii$a$) ও (ii$b$)-এ এই মান বসিয়ে আমরা পাই

$$-l_0 = c_1,$$

এবং $\sqrt{gl_0} = c_2\sqrt{\dfrac{g}{l_0}}$, অর্থাৎ $c_2 = l_0$.

(i) এবং (ii)-এ c_1 ও c_2-র মান বসিয়ে, সরল ক'রে লেখা যায়

$$x-2l_0=l_0\left(\sin\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t-\cos\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t\right)$$

$$=\sqrt{2}\,l_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(iii)}$$

এবং $$v=\sqrt{gl_0}\left(\sin\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t+\cos\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t\right)$$

$$=\sqrt{2gl_0}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t+\frac{\pi}{4}\right). \qquad \text{(iv)}$$

(iv) থেকে দেখা যাচ্ছে,

$$\sqrt{\frac{g}{l_0}}+\frac{\pi}{4}=\pi, \text{ অর্থাৎ } t=\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

হ'লে কণাটির বেগ সর্বপ্রথম শূন্য হয় (চিত্রে A′ বিন্দু) লক্ষণীয়, যে t-র মান ঋণাত্মক হবে না। কিন্তু ঐ সময়ে কণাটির ত্বরণের মান

$$\left.\frac{dv}{dt}\right]_{t=\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{l_0}{g}}}=\sqrt{2}\,g\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg]_{t=\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{l_0}{g}}}=-\sqrt{2}\,g,$$

অর্থাৎ উর্ধ্বাভিমুখী হওয়ার ফলে কণাটির বেগ শূন্য হওয়ার পর আবার উর্ধ্বাভিমুখে গমন করবে, অর্থাৎ A′A দিশায় গমন করবে। A বিন্দুতে $x=l_0$ হওয়ার জন্য, কণাটি A থেকে A′ পর্যন্ত গিয়ে আবার যখন A বিন্দুতে ফিরে আসবে তখন, (iii) থেকে আমরা পাই

$$l_0-2l_0=\sqrt{2}\,l_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t-\frac{\pi}{4}\right)$$

অর্থাৎ $$\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(v)}$$

কাজেই $$\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t-\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}.$$

অর্থাৎ $t = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ (vi)

লক্ষ্য করা দরকার যে (v)-এ $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ধরলে $t=0$ হয়, অর্থাৎ কণাটি $t=0$ সময়ে $x=l_0$ দূরত্বে ছিল বোঝা যায়,—যা আমরা ইতিপূর্বে আদি দশা-রূপে ব্যবহার করেছি। কণাটি যখন A বিন্দুতে ফিরে আসে তখন তার বেগ v_2 হল, (iv) অনুযায়ী

$$v_2 = \sqrt{2gl_0}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2gl_0}\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\sqrt{gl_0}.$$

অর্থাৎ, A বিন্দুতে ফিরে আসার সময় কণাটির বেগ AO দিশায় $\sqrt{gl_0}$ পরিমাণ। এই বেগের ফলে কণাটি A বিন্দু অতিক্রম করে AO অভিমুখে গমন করবে, এবং সেই সময়াভ্যন্তরে কণাটির উপর শুধুমাত্র মাধ্যাকর্ষণ ক্রিয়া করবে। কাজেই A থেকে B পর্যন্ত পৌঁছতে প্রয়োজনীয় সময় t_2র জন্য

$$\frac{l_0}{2} = \sqrt{gl_0}\, t_2 - \tfrac{1}{2}g t_2^2.$$

সরল করে আসে

$$\left(t_2 - \sqrt{\frac{l_0}{g}}\right)^2 = 0 \text{ অর্থাৎ } t_2 = \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

লক্ষণীয়, যে গতির প্রতিসাম্য থেকেও বলা যায় যে $t_2 = t_1$.

সুতরাং B বিন্দু পর্যন্ত ফিরে আসতে প্রয়োজনীয় সময়

$$= \sqrt{\frac{l_0}{g}} + \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{l_0}{g}} + \sqrt{\frac{l_0}{g}} = \left(\frac{3\pi}{2}+2\right)\sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

উদাহরণ 12. একটি হাল্কা সরু স্থিতিস্থাপক রজ্জুর সাহায্যে 3 kg ভর-বিশিষ্ট একটি বস্তুকে ঝুলিয়ে দেওয়া হয়েছে। ঘর্ষণ না থাকলে বস্তুটি উল্লম্ব-দিশায় $\frac{\pi}{5}$ সেকেণ্ড পর্যায়কাল-বিশিষ্ট সরল দোলনগতি নিষ্পন্ন করে। সাম্য অবস্থায় রজ্জুটির বৃদ্ধি নির্ণয় করতে হবে।

যখন বস্তুটির বেগ প্রতি সেকেণ্ডে v মিটার তখন বস্তুটির গতিতে অবমন্দন সৃষ্টিকারী বল হ'ল $48v$ নিউটন। বস্তুটিকে যদি সাম্য অবস্থার 3 cm উর্ধ্বে স্থির অবস্থায় ছেড়ে দেওয়া হয়, তবে বস্তুটি কতটা নিচে অবতরণ করার পর পুনরায় থামবে তা নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, OA রজ্জুটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l, এবং রজ্জুটি OB পর্যন্ত বৃদ্ধি পাওয়ার পর সাম্য প্রতিষ্ঠিত হয়, যেখানে $AB=a$, অর্থাৎ সাম্য অবস্থায় রজ্জুটির বৃদ্ধি a, তাহলে এই অবস্থায় বস্তুটির ওজন এবং রজ্জুটির টান T সাম্যে থাকে। কাজেই

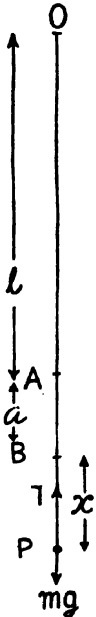
$$T=\lambda \frac{a}{l}=mg, \qquad \text{(i)}$$

যেখানে, m বস্তুটির ভর ও λ রজ্জুটির স্থিতিস্থাপক-গুণাংক সূচিত করে। সাম্য অবস্থা B থেকে আরও x-দূরত্ব টেনে বস্তুটিকে ছেড়ে দিলে, বস্তুটির গতীয় সমীকরণ (ঘর্ষণ অবজ্ঞা ক'রে) হ'ল

$$m\ddot{x}=mg-\frac{\lambda(a+x)}{l}.$$

(i) থেকে $\frac{\lambda a}{l}$-এর মান এখানে বসিয়ে, সরল ক'রে পাওয়া যায়

$$\ddot{x}=-\frac{g}{a}x \qquad \text{(ii)}$$

O, l, A, a, B, T, x, P, mg

এখান থেকে দেখা যায় বস্তুটি $\frac{2\pi}{\sqrt{g/a}}$ পর্যায়কাল-বিশিষ্ট সরল সমঞ্জস দোলন নিষ্পন্ন করে। এক্ষেত্রে পর্যায়কাল $\frac{\pi}{5}$ সেকেণ্ড। কাজেই

$$\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{\sqrt{g/a}} \text{ অর্থাৎ } \sqrt{\frac{g}{a}}=10, \text{ বা } \frac{g}{a}=100.$$

সুতরাং, সাম্য অবস্থায় রজ্জুটির বৃদ্ধি

$$a=\frac{g}{100}=9{\cdot}8\ cm.\ (\ g=980\ cm/s^2 \text{ ধ'রে })।$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$3\ddot{x} = -3\times 100x - 48\dot{x}$$

সরল ক'রে আসে

$$\ddot{x} + 16\dot{x} + 100x = 0. \qquad \text{(iii)}$$

(iii)-এর সহায়ক সমীকরণ হ'ল

$$D^2 + 16D + 100 = 0,$$

যার সমাধান

$$D = -8 \pm 6i.$$

কাজেই, (iii)-র সমাধান হ'ল

$$x = e^{-8t}(c_1 \cos 6t + c_2 \sin 6t) \qquad \text{(iva)}$$

এবং $\dot{x} = -8e^{-8t}(c_1 \cos 6t + c_2 \sin 6t) +$

$$e^{-8t}(-6c_1 \sin 6t + 6c_2 \cos 6t) \qquad \text{(ivb)}$$

যেখানে c_1, c_2 সমাকলন অচর। আদি সময়ে

$$t = 0,\ x = -\cdot 03 \text{ মিটার},\ \dot{x} = 0.$$

কাজেই,

$$-\cdot 03 = c_1,$$

$$0 = -8c_1 + 6c_2.$$

অতএব, $c_2 = -\cdot 04$

c_1 এবং c_2-র এই মান (iva) এবং (ivb)-তে বসিয়ে পাই

$$x = -e^{-8t}(\cdot 03 \cos 6t + \cdot 04 \sin 6t), \qquad \text{(va)}$$

$$\dot{x} = \cdot 5e^{-8t} \sin 6t \qquad \text{(vb)}$$

বস্তুটি যখন পুনরায় স্থির অবস্থায় আসবে, $\dot{x} = 0$, অর্থাৎ

$$\sin 6t = 0 = \sin \pi$$

কাজেই $t = \frac{\pi}{6}$. সেই সময়ে x-এর মান

$$x = -e^{-\frac{4}{3}\pi}(-\cdot 03) = \cdot 03e^{-\frac{4\pi}{3}}$$

বস্তুটিকে সাম্য অবস্থায় ·03 মিটার ঊর্ধ্বে ছেড়ে দেওয়া হয়েছিল, মনে রেখে আমরা দেখতে পাই, পুনরায় স্থির অবস্থায় আসার সময় বস্তুটি যে দূরত্ব নিচে অবতরণ করে তার পরিমাণ

$$(\cdot 03+\cdot 03e^{-\frac{4\pi}{8}}) \text{ মিটার}$$
$$=3(1+e^{-\frac{4\pi}{8}}) \text{ সেণ্টিমিটার।}$$

উদাহরণ 13. উল্লম্ব ঊর্ধ্বগামী একটি রকেট থেকে সুষমহারে পোড়া বারুদ নির্গত হচ্ছে। রকেট-সাপেক্ষে নিম্নাভিমুখে $g\tau$ বেগে বারুদ নির্গত হচ্ছে এবং নির্গমনের হার $\frac{2m_0}{\tau}$. আদি সময়ে রকেটটি স্থির ছিল এবং ভর ছিল $2m_0$, যার অর্ধেক পরিমাণ হ'ল বারুদ। মাধ্যাকর্ষণ ধ্রুবক ধ'রে এবং বায়ুর প্রতিরোধ অবজ্ঞা ক'রে রকেটের চরম দ্রুতি নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, t-সময়ে রকেটের ভর m এবং উল্লম্ব ঊর্ধ্বদিশায় বেগ v. তাহলে রকেটটির ভর হ্রাসের হার

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{2m_0}{\tau}=\text{ধ্রুবক।}$$

সমাকলন ক'রে আসে

$$m=-\frac{2m_0}{\tau}t+c_1, \tag{i}$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর। আদি সময়ে $t=0$, $m=2m_0$. অতএব,

$$2m_0=0+c_1$$

এই মান (i)-এ বসিয়ে আমরা পাই

$$m=2m_0\left(1-\frac{t}{\tau}\right). \tag{ii}$$

(95) অনুযায়ী রকেটের গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{dv}{dt}-(-g\tau)\left(\frac{-2m_0}{\tau}\right)=-mg$$

(ii)-এর সাহায্যে সরল ক'রে আসে

$$\frac{dv}{dt}=-g\left\{1-\frac{\tau}{\tau-t}\right\} \tag{iii}$$

সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$v = -g\{t+\tau\, ln|\tau - t|\} + c_2 \qquad \text{(iv)}$$

যেখানে c_2 সমাকলন অচর। আদি সময়ে $t=0,\ v=0.$ সুতরাং

$$0 = -g\{0+\tau\, ln|\tau|\} + c_2$$

c_2-র এই মান (iii)-এ বসিয়ে আসে

$$v = -g\left\{t+\tau\, ln\left|1-\frac{t}{\tau}\right|\right\}.$$

(ii)-এর সাহায্যে t-অপনয়ন ক'রে পাওয়া যায়

$$v = -g\tau\left[1-\frac{m}{2m_0}+ln\frac{m}{2m_0}\right] \qquad \text{(v)}$$

উভয়পক্ষকে m-সাপেক্ষে সমাকলন ক'রে আসে

$$\frac{dv}{dm} = -g\tau\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{2m_0}\right] \le 0, \qquad \text{(vi)}$$

কারণ, আদি অবস্থায় $m=2m_0$ এবং অতঃপর m-র মান হ্রাস পায়। প্রদত্ত সর্তানুসারে, m-র ক্ষুদ্রতম মান m_0. সুতরাং (vi) থেকে দেখা যায়, m হ্রাস পেলে v-র মান বৃদ্ধি পায় এবং v-র চরম মান পাওয়া যায় যখন $m=m_0$. (v) থেকে v-র চরম মান আসে

$$v]_{\text{চরম}} = -g\tau[1-\tfrac{1}{2}+ln\tfrac{1}{2}] = g\tau(ln2-\tfrac{1}{2}).$$

প্রশ্নমালা 2(গ)

(তারকা চিহ্নিত প্রশ্নগুলি প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে একটু কঠিন হতে পারে।)

1. সরলরেখায় গমনশীল একটি কণার উপর, প্রতি একক ভরের জন্য মূলবিন্দু থেকে x দূরত্বে, x অভিমুখে ক্রিয়াশীল বল $-\lambda^2 x+\mu$, হলে দেখাও যে কণাটির গতি সরল দোলনগতি হবে। দোলনের পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

2. সরলরেখায় গমনশীল একটি কণা ঐ রেখায় অবস্থিত স্থির বিন্দু O-সাপেক্ষে সরল দোলনগতিতে যাতায়াত করছে। O-বিন্দু সাপেক্ষে কণাটির সরণ যখন x_1 এবং x_2 তখন কণাটির বেগ যথাক্রমে u_1 এবং u_2 হলে দেখাও যে কণাটির পর্যায়কাল হ'ল

$$2\pi\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{u_1^2-u_2^2}\right)^{1/2}$$

3. সরল দোলনগতি-বিশিষ্ট একটি কণার অবস্থিতি যখন x_1 এবং x_2 তখন বেগ ও ত্বরণের মান যথাক্রমে u_1 ও u_2 এবং f_1 ও f_2 হলে, দেখাও যে

$$u_1^2 - u_2^2 = (x_1 - x_2)(f_1 + f_2).$$

4. সরলরেখায় সরল সমঞ্জস গতি-বিশিষ্ট একটি কণা ঐ রেখায় অবস্থিত স্থিরবিন্দু O-সাপেক্ষে প্রতি একক সময়ে n সংখ্যক দোলন সম্পন্ন করছে। দেখাও যে O-বিন্দুতে কণাটির গতীয় শক্তি, O-বিন্দু থেকে x-দূরত্বে কণাটির গতীয় শক্তির চেয়ে $2\pi^2 n^2 m x^2$ পরিমাণ অধিক।

5. সরলরেখায় গমনশীল একটি কণা ঐ রেখায় অবস্থিত স্থিরবিন্দু O-সাপেক্ষে সরল দোলনগতিতে যাতায়াত করছে। কণাটি একটি স্থিরাবস্থা থেকে অপর স্থিরাবস্থায় পৌঁছানর মাঝে অব্যবহিত পর পর তিন সেকেণ্ডে, O-বিন্দু সাপেক্ষে কণাটির অবস্থিতি যথাক্রমে a, b, c হলে দেখাও যে কণাটির পর্যায়কাল হ'ল

$$2\pi/\cos^{-1}[(a+c)/2b].$$

6. সরলরেখায় গমনশীল একটি কণার বেগ v-এর মান,

$$v^2 = -4x^2 + 24x - 32,$$

যেখানে ঐ রেখায় অবস্থিত স্থিরবিন্দু O-সাপেক্ষে অবস্থিতি x-পরিমাপ করা হয়েছে। দেখাও যে কণাটির গতি সরল দোলনগতি। কণাটির বিস্তার ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

7. একটি স্থিতিস্থাপক হাল্কা রজ্জুকে, এক প্রান্তে m gm একটি ভর বেঁধে অপর প্রান্ত থেকে ঝুলিয়ে দেওয়া হ'ল। রজ্জুটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l এবং স্থিতিস্থাপক-গুণাংক λ গ্রাম-ওজন হলে, দেখাও যে উল্লম্ব দোলনের পর্যায়কাল

$$2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda g}}.$$

8. একটি হাল্কা সরু সর্পিল স্প্রিংকে এক প্রান্তে একটি ভর বেঁধে অপর প্রান্ত থেকে ঝুলিয়ে দেওয়া হ'ল। ভরটির জন্য স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি ε হলে দেখাও যে ভরটির উল্লম্ব দোলনের পর্যায়কাল $2\pi\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{g}}$.

9. সরলরেখায় গমনরত একটি কণাকে, ঐ রেখায় কণাটির দু'পাশে অবস্থিত দুটি বলকেন্দ্র আকর্ষণ করছে। আকর্ষণ বল বলকেন্দ্র থেকে কণাটির দূরত্বের সমানুপাতিক এবং একক দূরত্বে প্রতি একক ভরের জন্য বলের পরিমাণ λ ও μ. দেখাও যে কণাটির গতি সরল সমঞ্জস এবং পর্যায়কাল

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda+\mu}}$$

বলকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবিন্দুতে, আদি সময়ে কণাটিকে স্থির অবস্থায় ছেড়ে দেওয়া হলে 3 সেকেণ্ড পরে কণাটির অবস্থিতি নির্ণয় কর।

*10. একটি হাল্কা সরু সঁপিল স্প্রিং-এর দুই প্রান্তে দুটি ভর m এবং M যুক্ত আছে। স্প্রিং-এর দুই প্রান্ত টেনে বড় ক'রে, একটি মসৃণ টেবিলের উপর ছেড়ে দেওয়া হ'ল। দেখাও যে কণাদ্বয়ের গতি সরল সমঞ্জস। স্প্রিং-এর স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l এবং স্থিতিস্থাপক-গুণাঙ্ক λ হলে দেখাও যে কোন একটি ভরের পর্যায়কাল

$$2\pi\left[\frac{mlM}{\lambda(m+M)}\right]^{1/2}.$$

*11. একটি হাল্কা স্থিতিস্থাপক রজ্জুর একপ্রান্তে একটি ভারী কণা ঝুলিয়ে দেওয়া হয়েছে এবং অপর প্রান্ত স্থির। রজ্জুটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l এবং কণাটি সাম্যে থাকলে দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি হয় ε. রজ্জুটিকে টেনে, আরও δ পরিমাণ বাড়িয়ে ছেড়ে দিলে, দেখাও যে কণাটির গতি সরল সমঞ্জস হবে এবং t-সময়ে রজ্জুটির দৈর্ঘ্য হ'ল

$$l+\varepsilon+\delta\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}}\,t\right).$$

12. $2l$ এবং $2L$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি রজ্জুর দু'প্রান্তে পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত ক'রে একটি অন্তহীন রজ্জু সৃষ্টি করা হ'ল। প্রতি একক দৈর্ঘ্যের জন্য অংশদ্বয়ের ভর যথাক্রমে m এবং M. একটি মসৃণ পেরেকের উপর সুস্থিতিতে রজ্জুটি ঝুলিয়ে দেওয়া হ'ল এবং অতঃপর সেই অবস্থা থেকে সামান্য সরিয়ে দেওয়া হলে দেখাও যে রজ্জুটির দোলনের পর্যায়কাল

$$2\pi\left[\frac{ml+ML}{|M-m|g}\right]^{1/2}.$$

13. সরলরেখায় গমনরত একটি কণাকে ঐ রেখাস্থিত বলকেন্দ্র O থেকে x দূরত্বে, প্রতি একক ভরের জন্য $\mu^2 x$ পরিমাণ বল দ্বারা আকর্ষণ করা হচ্ছে। দেখাও যে, যদি আদি সময়ে কণাটিকে O থেকে a দূরত্বে x-বৃদ্ধি অভিমুখে v_0 বেগে নিক্ষেপ করা হয়, তবে t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি

$$x = a \cos \mu t + \frac{v_0}{\mu} \sin \mu t.$$

14. সরলরেখায় মূলবিন্দু O সাপেক্ষে একটি কণার গতি সরল সমঞ্জস। O-বিন্দু থেকে একক দূরত্বে প্রতি একক ভরের জন্য ক্রিয়াশীল বল μ^2 এবং কণাটির বিস্তার a. কণাটি যখন O থেকে la দূরে, তখন গতির দিশায় আঘাত করায় কণাটির বেগ বৃদ্ধি পেয়ে μa হ'ল। পরবর্তী সমঞ্জস গতির বিস্তার নির্ণয় কর।

15. দেখাও যে অবমন্দিত সমঞ্জস গতিতে কণাটি ক্রমান্বয়ে যে দোলনগুলি সম্পন্ন করতে থাকে, তাদের বিস্তারের পরিমাণগুলি একটি জ্যামিতিক শ্রেণী রচনা করে।

16. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার উপর, মূলবিন্দু থেকে x-দূরত্বে প্রতি একক ভরের জন্য প্রত্যানয়ক বল $\mu^2 x$ এবং বাধা λv ক্রিয়া করছে, যেখানে $\mu^2 > \lambda^2/4$. আদি সময়ে কণাটিকে মূলবিন্দু থেকে u বেগে নিক্ষেপ করা হলে দেখাও যে, প্রথম স্থির অবস্থায় আসতে কণাটির যে সময়ের প্রয়োজন তা u-এর উপর নির্ভর করে না। মূলবিন্দু থেকে c দূরত্বে কণাটি প্রথম স্থির অবস্থায় এলে দেখাও যে

$$u = \mu c \exp\left[\frac{1}{\nu} \tan^{-1} \nu\right],$$

যেখানে $\nu = \dfrac{2}{\lambda}\left(\mu^2 - \dfrac{\lambda^2}{4}\right)^{1/2}$,

17. সরলরেখায় গমনরত একটি কণার উপর মূলবিন্দু থেকে x-দূরত্বে প্রতি একক ভরের জন্য প্রত্যানয়ক বল $(\lambda^2 + \mu^2)x$ এবং বাধা $2\lambda v$ ক্রিয়া করছে। আদি সময়ে $(t=0)$ মূলবিন্দু থেকে c দূরত্বে স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা সুরু করলে দেখাও যে t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি

$$x' = \frac{c}{\mu} \{\mu \cos \mu t + \lambda \sin \mu t\} \exp(-\lambda t).$$

18. একটি ভূকম্পন-মাপক যন্ত্রের গতিশীল অংশের ভর 20 গ্রাম, এবং মুক্তদোলনের পর্যায়কাল 2 সেকেণ্ড। একটি ভূকম্পন লিপিবদ্ধ করতে গিয়ে ঐ অংশটি 5 সেকেণ্ড পর্যায়কাল এবং 5 মিলিমিটার বিস্তার-বিশিষ্ট দোলন আরম্ভ করে। অংশটির উপর যে বল ক্রিয়া করে, সি জি এস এককে তার চরম মান নির্ণয় কর (ঘর্ষণ অবজ্ঞেয়)।

*19. একটি হাল্কা সরু স্থিতিস্থাপক স্প্রিং-এর একপ্রান্তে M ভর-বিশিষ্ট একটি কণা ঝুলছে। স্প্রিং-টির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l ও স্থিতিস্থাপক-গুণাংক $2Mg$. আদি সময়ে স্প্রিং ও কণাটি সাম্যে আছে এবং স্প্রিং-এর উচ্চতর প্রান্তটি সরল সমঞ্জস গতিতে দোলানো হচ্ছে, যাতে t-সময়ে আলোচ্য প্রান্তটির নিম্নাভিমুখী সরণ $c \sin pt$ হয়, যেখানে $p=2g/l$. দেখাও যে, ঐ সময়ে কণাটির সরণ

$$\frac{gc}{p^2 l}(\sin pt - pt \cos pt).$$

20. M ভর-বিশিষ্ট একটি কণা সরলরেখায় সরল সমঞ্জস গতিতে যাতায়াত করছে। কণাটির উপর বল $f \cos \omega t$ ক্রিয়া করলে কণাটির চরম দ্রুতি হয় V. দেখাও যে, মুক্তদোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক হ'ল

$$\frac{\omega(f+\omega MV)}{MV},$$

21. মাধ্যাকর্ষণের ফলে স্থির মেঘের মধ্য দিয়ে, স্থির অবস্থা থেকে একটি কণা নিচে নামছে। কণাটির গায়ে জলীয় বাষ্প জ'মে কণাটির ভর বৃদ্ধি করছে। ভর বৃদ্ধির হার $m\lambda v$ যেখানে t-সময়ে কণাটির ভর m, বেগ v এবং λ একটি ধ্রুবক। দেখাও যে, x-দূরত্ব অবতরণ করার পর কণাটির বেগ নির্ণয়ের সমীকরণ হ'ল

$$\lambda v^2 = g(1-e^{-2\lambda x}).$$

উপরন্তু দেখাও যে, t-সময়ে কণাটি যে দূরত্ব অবতরণ করে, তার মান হ'ল

$$\frac{1}{\lambda} ln\,[\{e^{t\sqrt{\lambda g}}+e^{-t\sqrt{\lambda g}}\}/2]$$

22. একটি মহাকাশযান থেকে পোড়া জ্বালানী যানটি সাপেক্ষে u বেগে সুষম হারে নির্গত হচ্ছে। মহাকাশ যানটির ভর m-এর পরিবর্তনের হার $\frac{dm}{dt} = -\lambda (=$ ধ্রুবক) হলে, দেখাও যে যানটির বেগের পরিবর্তন

$$v - v_0 = -u \ ln \left| 1 - \frac{\lambda t}{m_0} \right.$$

যেখানে আদি সময়ে $(t=0)$ ভর m_0 এবং বেগ v_0.

23. ক্রমাগত সুষমহারে পোড়া জ্বালানী নির্গত ক'রে একটি রকেট উল্লম্ব উর্ধ্বাভিমুখে উঠেছে। রকেট-সাপেক্ষে নিম্নাভিমুখে জ্বালানীর বেগ u এবং জ্বালানী নির্গমনের হার μ ধ্রুবক। মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণ g ধ্রুবক ধ'রে দেখাও যে t-সময়ে ভূ-পৃষ্ঠ থেকে রকেটটির উচ্চতা হ'ল

$$\frac{um_0}{\mu} \left\{ \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t\right) ln \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t\right) + \frac{\mu}{m_0} t \right\} - \frac{1}{2} g t^2,$$

যেখানে আদি সময়ে $(t=0)$ ভূ-পৃষ্ঠে রকেটটির বেগ শূন্য এবং ভর m_0 ছিল।

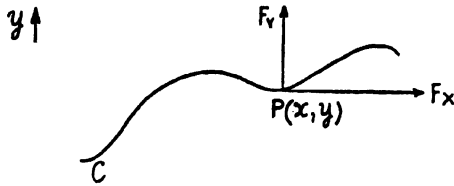
উত্তরমালা 2(গ)

6. 1, π.

তৃতীয় অধ্যায়

সমতলীয় গতি

3·1. বিভিন্ন অক্ষে গতীয় সমীকরণ—পূর্বের অধ্যায়ে, বলের ক্রিয়ার ফলে একটি কণার ঋজুরেখ গতি আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান এবং পরবর্তী দুটি অধ্যায়ে ধরা হবে, আলোচ্য কণাটির গতি একটি সমতলে সীমাবদ্ধ। অর্থাৎ কণাটির গতিপথ একটি সমতলীয় বক্র।

আলোচ্য সমস্যাগুলি প্রধানতঃ দুই ধরনের, (i) বল প্রদত্ত আছে, গতিপথ নির্ণয় করতে হবে এবং সময়ের ফাংশন-রূপে বেগ নির্ণয় করতে হবে; (ii) গতিপথ প্রদত্ত আছে, বল নির্ণয় করতে হবে। এরূপ প্রথম ধরনের সমস্যার আলোচনায় দ্বিমাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশে, সুবিধা অনুযায়ী দুটি পরস্পর লম্ব দিশা বেছে নেওয়া হয়, এবং ঐ দুই দিশায় ক্রিয়াশীল বল ও ত্বরণের উপাংশগুলি নির্ণয় করা হয়। গতির দ্বিতীয় নিয়ম ও বলের ভৌত স্বতন্ত্রতা

চিত্র 3·1—কার্তেসীয় স্থানাংকের ব্যবহার

নীতি অনুযায়ী, (ভর পরিবর্তনশীল নয়, ধ'রে নিয়ে) বল ও ত্বরণের উপাংশগুলি পরস্পর সমীকরণ ক'রে উভয় দিশার জন্য একটি ক'রে মোট দুটি অবকল সমীকরণ লাভ করা হয়,—যাদের সমাধান করলে গতিপথে কণার অবস্থিতি ও বেগ সময়ের ফাংশন-রূপে পাওয়া যায়। আর দ্বিতীয় ধরনের সমস্যার জন্য সাধারণতঃ প্রদত্ত গতিপথকে সময় সাপেক্ষে দুইবার অবকলন ক'রে গতীয় সমীকরণের সাহায্যে বল নির্ণয় করা হয়।

সমকোণীয় কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্রে (চিত্র 3·1) যদি t-সময়ে, m ভর-বিশিষ্ট কণা P-র অবস্থিতি x, y স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয়, এবং x ও y-অক্ষরেখার দিশায়, স্থানাঙ্কের বৃদ্ধি অভিমুখে, ঐ সময়ে ক্রিয়াশীল বলের উপাংশগুলি যথাক্রমে F_x এবং F_y হয়, তবে x এবং y দিশায় কণাটির ভরবেগ হ'ল যথাক্রমে $m\dot{x}$ এবং $m\dot{y}$. সুতরাং, গতির দ্বিতীয় নিয়ম ও বলের ভৌত স্বতন্ত্রতা নীতি অনুয়ায়ী, কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x,$$

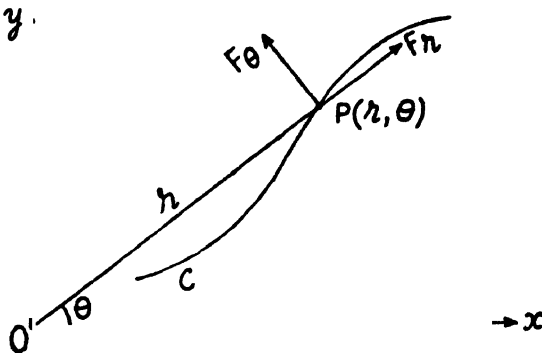
$$\text{এবং} \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y. \tag{1}$$

গতির সঙ্গে ভর পরিবর্তনশীল নয় ধ'রে নিয়ে (1) থেকে পাওয়া যায়

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

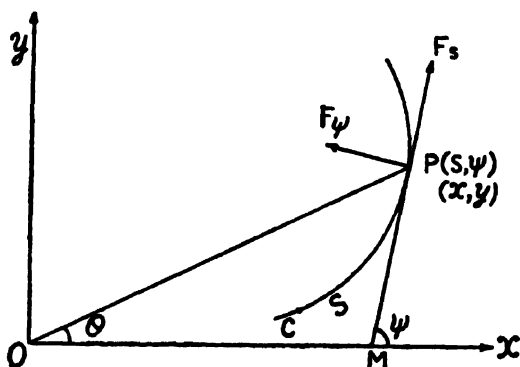
$$\text{এবং} \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y. \tag{2}$$

এই দুটি দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সমীকরণ সমাধান করলে, সমস্যাটির সমাধান পাওয়া যাবে।

অনেক ক্ষেত্রে ধ্রুবীয় স্থানাঙ্কের ব্যবহার সুবিধাজনক। যদি t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি $P(r,\theta)$ হয় (চিত্র 3·2) এবং অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় r এবং θ বৃদ্ধি অভিমুখে বলের উপাংশগুলি যথাক্রমে F_r ও F_θ হয়, তবে

চিত্র 3·2—ধ্রুবীয় স্থানাঙ্কের ব্যবহার

গতির দ্বিতীয় নিয়ম ও বলের ভৌত স্বতন্ত্রতা নীতি অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হ'ল (m ধ্রুবক ধ'রে);

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r,$$
$$m\,\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\theta})=F_\theta. \qquad (3)$$

কোন কোন ক্ষেত্রে আবার স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় গতীয় সমীকরণ লেখা সুবিধাজনক হয়। কণাটির গতিপথের উপর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু C থেকে কণা P-র বক্র বরাবর দূরত্ব s এবং কোন নির্দিষ্ট দিশা OX-র সঙ্গে স্পর্শক PM, ψ কোণ করে। তাহলে, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতির স্থানাঙ্ক হ'ল (s, ψ) (চিত্র 3·3)। স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় যথাক্রমে s বৃদ্ধি ও বক্রতা-কেন্দ্র অভিমুখে ক্রিয়াশীল বলের উপাংশগুলি F_s ও F_ψ দ্বারা নির্দেশ করা হলে, গতির দ্বিতীয় নিয়ম ও বলের ভৌত স্বতন্ত্রতা নীতি অনুযায়ী, কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হ'ল (m ধ্রুবক ধ'রে) :

চিত্র 3·3—আন্তর্স্থানাঙ্কের ব্যবহার

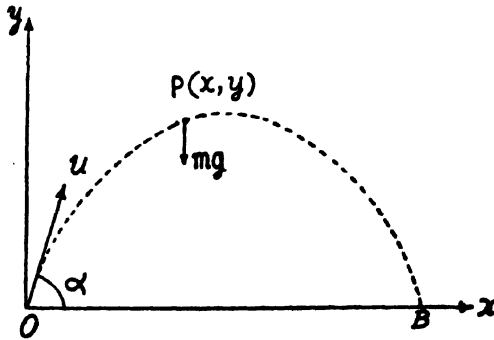
$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_s,$$

এবং $$m\frac{v^2}{\rho}=F_\psi, \qquad (4)$$

যেখানে ρ কণাটির গতিপথের বক্রতা-ব্যাসার্ধ সূচিত করে। (s, ψ) স্থানাঙ্ককে সাধারণতঃ **আন্তর্স্থানাঙ্ক** বলা হয়। যে-সকল সমস্যায় কণাটি

কোন প্রদত্ত বক্রপথে গমন করতে বাধ্য হয়, সেরূপ গতিকে সবাধ গতি বলে। সবাধ গতির আলোচনায় আন্তর্ঘ্নাঙ্কের প্রয়োগে সুবিধা হয়।

3·2. মাধ্যাকর্ষণ-জনিত প্রাসের গতি পুরাকালে যুদ্ধে যে সকল অস্ত্র ব্যবহার করা হ'ত, প্রাস তাদের মধ্যে অন্যতম। এই অস্ত্রটি শত্রুপক্ষের প্রতি ছুঁড়ে মারা হ'ত। আধুনিক যুদ্ধে, শত্রুপক্ষের প্রতি কামানের গোলা নিক্ষেপ করার রীতি আছে, যা তিরিশ-চল্লিশ মাইল দূরবর্তী লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করতে পারে। এক্ষেত্রে কামানের গোলাকে আমরা প্রাস ব'লে ভাবতে পারি। আলোচনার সুবিধার জন্য প্রাসকে একটি m ভর-বিশিষ্ট কণা ব'লে ধরা হবে।

ভূমিতে অবস্থিত কোন উৎক্ষেপণ কেন্দ্র (বা কামান) থেকে, ভূমির সঙ্গে α কোণ ক'রে u বেগে একটি প্রাস নিক্ষেপ করা হ'ল। প্রাসটির

চিত্র 3·4—প্রাসের গতি

গতি নিরূপণ করতে হবে। মাধ্যাকর্ষণ g-র মান অচর এবং বায়ুর প্রতিরোধ নেই, ধরা হ'ল। উৎক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু, এবং আনুভূমিক ও ঊর্ধ্বদিশায় যথাক্রমে x এবং y-অক্ষরেখা নেওয়া হ'ল। ধরা যাক, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি P-র স্থানাঙ্ক (x, y). ঐ সময়ে কণাটির উপর নিম্নাভিমুখে মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ক্রিয়াশীল বল হ'ল mg এবং এছাড়া আর কোন বল ক্রিয়া করছে না। কাজেই, এক্ষেত্রে

$$F_x = 0, \text{ ও } F_y = -mg.$$

সুতরাং (2) অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \tag{5a}$$

এবং
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg. \tag{5b}$$

এই সমীকরণ-দুটি সম্পূর্ণরূপে সমাধানের জন্য আদি দশার প্রয়োজন। আদি সময়ে কণাটি মূলবিন্দুতে ছিল এবং ঐ সময়ে কণাটির বেগ ছিল x-বৃদ্ধি অভিমুখে $u \cos \alpha$ এবং y-বৃদ্ধি অভিমুখে $u \sin \alpha$. সুতরাং, এক্ষেত্রে আদি দশা হ'ল

$$t=0,\ x=0,\ y=0,\ \dot{x}=u\cos\alpha,\ \dot{y}=u\sin a. \tag{6}$$

(5a)-র উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, এবং সময়সাপেক্ষে একবার সমাকলন করলে আসে

$$\dot{x}\equiv\frac{dx}{dt}=c_1,$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর। আদি দশা (6) থেকে দেখা যাচ্ছে

$$c_1=u\cos\alpha,$$

কাজেই

$$\frac{dx}{dt}=u\cos\alpha. \tag{7}$$

সময় সাপেক্ষে (7)-কে সমাকলন করলে পাওয়া যায় (u এবং α সময়ের উপর নির্ভর করে না) ঃ

$$x=t.\ u\cos\alpha+c_2. \tag{8a}$$

আদি দশা (6)-এর মান (8a)-তে বসিয়ে সমাকলন অচর c_2-এর মান আসে

$$0=0+c_2.$$

সুতরাং

$$x=t.\ u\cos\alpha \tag{8b}$$

আবার (5b)-এর উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, এবং সময়সাপেক্ষে একবার সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = -gt + c_3 \tag{9}$$

আদি দশা (6) থেকে $\dot{y}$-র মান এখানে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$u \sin \alpha = 0 + c_3$$

অচর c_3-র এই মান (9)-এ বসিয়ে, আসে

$$\frac{dy}{dt} = -gt + u \sin \alpha \tag{10}$$

সময়সাপেক্ষে সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + t.\ u \sin \alpha + c_4 \tag{11}$$

যেখানে c_4 সমাকলন অচর। এখানে, আদি দশা (6) বসিয়ে পাওয়া যায়

$$0 = 0 + 0 + c_4.$$

সুতরাং,

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + t.u \sin \alpha. \tag{12}$$

সময়সাপেক্ষে কণাটির বেগের উপাংশগুলি (7) এবং (10) থেকে পাওয়া যায়, আর কণাটির অবস্থিতি (x, y)-র মান পাওয়া যায় (8b) এবং (12) থেকে। (7) থেকে দেখা যাচ্ছে, বেগের আনুভূমিক উপাংশ সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় না। এর কারণ, ঐ দিশায় কোন বল ক্রিয়া করে না। (8b) এবং (12)-এর মধ্যে t-সময় অপনয়ন করলে, কণাটির গতিপথের সমীকরণ পাওয়া যায়

$$y = -\tfrac{1}{2}g\left(\frac{x}{u \cos \alpha}\right)^2 + \frac{x}{u \cos \alpha}\, u \sin \alpha.$$

সরল করলে দাঁড়ায়

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2} \sec^2 \alpha. \tag{13}$$

(13) থেকে দেখা যাচ্ছে, কণাটির গতিপথ একটি পরাবৃত্ত। আলোচনার সুবিধার জন্য (13)-কে নিম্নরূপে লেখা হ'ল :

$$x^2 - 2x.\frac{u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha\ y,$$

অর্থাৎ,

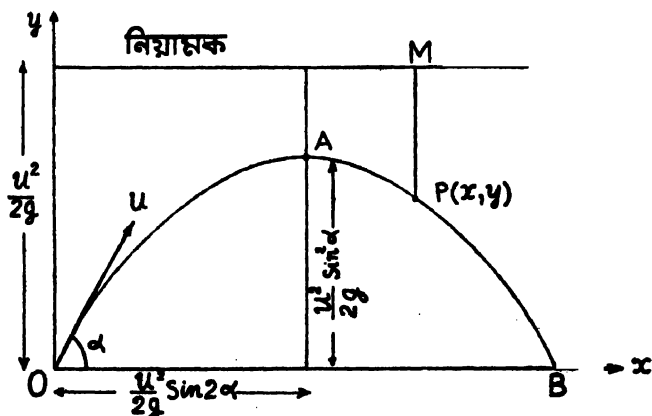
$$\left(x-\frac{u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\right)^2 = -\frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha\left(y-\frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha\right) \quad (13')$$

এখান থেকে দেখা যাচ্ছে, পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু হ'ল

$$\left(\frac{u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha, \frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha\right),$$

$$\text{নাভিলম্ব} = \frac{2u^2}{g}\cos^2\alpha = \frac{2}{g}(\text{ বেগের আনুভূমিক উপাংশ }) \quad (14a)$$

এবং অক্ষ নিম্নাভিমুখী, যার সমীকরণ হ'ল

$$x = \frac{u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha. \quad (14b)$$

চিত্র 3·5—মাধ্যাকর্ষণ-জনিত প্রাসের গতিপথ

অক্ষের উপর, শীর্ষবিন্দু থেকে নাভিলম্বের এক-চতুর্থাংশ নিম্নে নাভিবিন্দুটি অবস্থিত। নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক হ'ল $\left(\frac{u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\alpha\right)$.

(চিত্র 3·5) নিয়ামক রেখাটি শীর্ষবিন্দু থেকে নাভিলম্বের এক-চতুর্থাংশ ঊর্ধ্বে আনুভূমিক রেখার সমান্তরাল। নিয়ামকের সমীকরণ হ'ল

$$y=\frac{u^2}{2g}. \tag{14c}$$

এখানে লক্ষ্য করার বিষয় যে নিয়ামকের সমীকরণে α অনুপস্থিত। অর্থাৎ, উৎক্ষেপণ বিন্দু থেকে নিয়ামকের দূরত্ব উৎক্ষেপণ কোণ α-র উপর নির্ভর করে না। আরও লক্ষ্য করার বিষয় যে u বেগে ঊর্ধ্ব দিশায় কণাটি নিক্ষেপ করা হলে ভূমি থেকে কণাটির যে চরম দূরত্ব হয়, তা নিয়ামকের দূরত্বের সমান।

এখন, (13) সমীকরণে $y=0$ বসিয়ে দেখা যায়, কণাটি যখন আবার মাটিতে ফিরে আসে (চিত্রে B বিন্দু), তখন উৎক্ষেপণ বিন্দু O থেকে কণাটির দূরত্ব

$$\mathrm{OB}=\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha. \tag{14d}$$

OB দূরত্বকে প্রাসের পাল্লা বলা হয়। $\sin 2\alpha$-র চরম মান 1 ব'লে, (14d) থেকে দেখা যাচ্ছে

$$\text{প্রাসের চরম পাল্লা}=\frac{u^2}{g},$$

এবং এর জন্য $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ অর্থাৎ $\alpha=\frac{\pi}{4}$ কোণে প্রাসটি নিক্ষেপ করতে হবে।

প্রাসের অবস্থিতি যখন $\mathrm{P}(x, y)$, সেই সময়ে তার বেগের পরিমাণ (7) ও (10) থেকে আসে

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=u^2\cos^2\alpha+(-gt+u\sin\alpha)^2$$

$$=u^2-2gt\,u\sin\alpha+g^2t^2.$$

কাজেই, (12)-র সাহায্যে, সময় t-অপনয়ন করলে আসে

$$v^2=u^2-2gy, \tag{15a}$$

অর্থাৎ ভূমি থেকে সমান উচ্চতায় বেগের মান সমান হয়। (15a) থেকে প্রাসের গতীয় শক্তি পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 - mgy = mg\text{H} - mgy \qquad (15b)$$

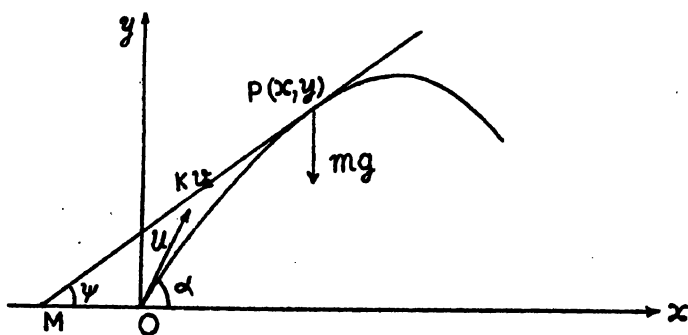
যেখানে $\text{H} = \dfrac{u^2}{2g}$ = নিয়ামকের উচ্চতা। যেহেতু $\text{H} - y = \text{MP}$,

(15b) থেকে দেখা যাচ্ছে, যেকোন অবস্থিতি P-তে প্রাসের গতীয় শক্তি, P-র ঠিক ঊর্ধ্বে নিয়ামকস্থ বিন্দু M থেকে P পর্যন্ত অবাধ পতনে লব্ধ গতীয় শক্তির সমান।

উপরন্তু, (15) থেকে দেখা যায়

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mu^2 = \text{ধ্রুবক},$$

অর্থাৎ যেকোন অবস্থিতিতে প্রাসটির গতীয় শক্তি এবং স্থৈতিক শক্তির যোগফল ধ্রুবক।

3·3. প্রতিরোধী মাধ্যমে প্রাসের গতি—এবার একটি **প্রতিরোধী মাধ্যমে প্রাসের গতি** আলোচনা করা হবে, যেখানে জানা আছে, প্রতিরোধ বেগের সঙ্গে সমানুপাতিক। লক্ষ্য করা দরকার, যে প্রতিরোধ সর্বদা গতির বিপরীত মুখে ক্রিয়া করে। 3·6 চিত্রে প্রাসের উপর ক্রিয়াশীল বল দেখানো হয়েছে। $\text{P}(x,y)$ অবস্থিতিতে প্রাসের বেগ

চিত্র 3·6—প্রতিরোধী মাধ্যমে প্রাসের গতি

v হলে, প্রতিরোধ-জনিত বল হ'ল kv, যা ঐ বিন্দুতে গতিপথের স্পর্শক PM-এর দিশায় ক্রিয়া করে। $k(>0)$ সমানুপাত-জনিত

অচর। স্পর্শক PM, x-অক্ষরেখার সঙ্গে ψ কোণ ক'রে ধরা হ'ল। তাহলে, পূর্বের অনুচ্ছেদের ন্যায় অক্ষরেখা নিয়ে, (2) অনুযায়ী x এবং y-অক্ষরেখার দিশায় প্রাসের গতীয় সমীকরণ হ'ল,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kv\cos\psi \tag{16a}$$

এবং

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - kv\sin\psi. \tag{16b}$$

$$v\cos\psi = \frac{dx}{dt}, \text{ এবং } v\sin\psi = \frac{dy}{dt} \tag{17}$$

সুতরাং (16a) ও (16b)-র উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে (17)-র সাহায্যে লেখা যায়

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} = 0, \tag{18a}$$

এবং

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dy}{dt} = -g, \tag{18b}$$

যেখানে $\tau = \frac{m}{k} (>0)$ একটি অচর, যা শ্লথন সময় রূপায়িত করে। (18a) এবং (18b) উভয়ই দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ। এই সমীকরণদ্বয় সমাধানের জন্য প্রয়োজনীয় আদি দশা হ'ল, পূর্বের অনুচ্ছেদে প্রদত্ত (6) সমীকরণ।

উপরোক্ত সমীকরণদ্বয় সমাধান করার পূর্বেই কিন্তু, কণাটির গতি সম্বন্ধীয় কয়েকটি তাৎপর্যপূর্ণ তথ্য আমরা লাভ করতে পারি। প্রথমেই লক্ষ্য করা দরকার, যে আদি অবস্থায় $\dot{y} > 0$ ব'লে (18b) অনুযায়ী $\frac{d\dot{y}}{dt} < 0$, অর্থাৎ অর্থাৎ সময় বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে বেগ হ্রাস পাচ্ছে। হ্রাস পেতে পেতে যখন $\dot{y} = -g\tau$, তখন $\frac{d\dot{y}}{dt} = 0$, — অর্থাৎ তখন ঊর্ধ্ব দিশায় কোন ত্বরণ থাকে

না। ত্বরণ শূন্য হওয়ার ফলে, অতঃপর $\dot{y}$-এর মান আর পরিবর্তিত হয় না। এক্ষেত্রে $\dot{y}$-এর সীমান্ত মান হ'ল $\dot{y} = -g\tau$. অনুরূপভাবে, (18a) থেকে দেখা যায়, আদি অবস্থায় $\dot{x} > 0$ এবং $\frac{d\dot{x}}{dt} < 0$, — অর্থাৎ $\dot{x}$-এর মান হ্রাস পেতে পেতে শূন্যের দিকে যায় এবং $\dot{x}$ ঋণাত্মক হতে পারে না।

লক্ষ্য করার বিষয় যে (18a) এবং (18b) যথাক্রমে $\dot{x}$ এবং $\dot{y}$ নির্ণয়ের প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ, যাদের উভয়ের সমাকলন-গুণক হ'ল

$$e^{\int \frac{1}{\tau} dt} = e^{\frac{1}{\tau} t}.$$

(18a)-র উভয়পক্ষকে সমাকলন-গুণক $e^{\frac{1}{\tau} t}$ দ্বারা গুণ করলে আসে

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{\tau} t}\, \dot{x}\right) = 0.$$

সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$e^{\frac{1}{\tau} t}\, \dot{x} = c_1 \qquad (19a)$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর সূচিত করে। আদি দশা (6) এখানে বসালে আসে

$$u \cos \alpha = c_1.$$

c_1-এর এই মান (19a)-তে বসিয়ে, প্রাসের বেগের আনুভূমিক উপাংশ আসে

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = u \cos \alpha\; e^{-\frac{1}{\tau} t} \qquad (19b)$$

সময়সাপেক্ষে সমাকলন ক'রে (19b) থেকে পাওয়া যায়

$$x = c_2 - \tau\, u \cos \alpha\; e^{-\frac{1}{\tau} t} \qquad (19c)$$

আদি দশা (6) এখানে বসিয়ে সমাকলন অচর c_2 নির্ণয়ের সমীকরণ আসে

$$0 = c_2 - \tau\, u \cos \alpha.$$

এখান থেকে c_2-এর মান (19c)-তে বসিয়ে, সময়ের ফাংশন-রূপে x-এর মান আসে

$$x = \tau\, u \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t}\right). \qquad (19d)$$

আবার (18*b*)-কে সমাকলন-গুণক $e^{\frac{1}{\tau}t}$ দ্বারা গুণ ক'রে লেখা যায়

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{\tau}t}\dot{y}) = -ge^{\frac{1}{\tau}t}.$$

সময়সাপেক্ষে সমাকলন করলে দাঁড়ায়

$$e^{\frac{1}{\tau}t}\dot{y} = c_3 - \tau g e^{\frac{1}{\tau}t}, \qquad (20a)$$

যেখানে c_3 সমাকলন অচর সূচিত করে। এখানে আদি দশা (6) বসিয়ে c_3 নির্ণয়ের সমীকরণ আসে

$$u \sin \alpha = c_3 - \tau g.$$

এখান থেকে c_3-র মান (20*a*)-তে বসিয়ে বেগের ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ দাঁড়ায়

$$\frac{dy}{dt} = -g\tau + (u \sin \alpha + g\tau)e^{-\frac{1}{\tau}t}. \qquad (20b)$$

সময়সাপেক্ষে সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$y = c_4 - \tau g t - \tau(u \sin \alpha + g\tau)e^{-\frac{1}{\tau}t}, \qquad (20c)$$

যেখানে c_4 সমাকলন অচর। এখানে আদি দশা (6) বসিয়ে আসে

$$0 = c_4 - 0 - \tau(u \sin \alpha + g\tau).$$

c_4-এর এই মান (20*c*)-তে বসিয়ে সময়সাপেক্ষে y-র মান দাঁড়ায়

$$y = -\tau g t + \tau (u \sin \alpha + g\tau)(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}). \qquad (20d)$$

প্রাসটির বেগের উপাংশগুলি (19*d*) এবং (20*b*) থেকে পাওয়া যায়, আর অবস্থিতি জানা যায় (19*d*) ও (20*d*) থেকে। (19*d*) এবং (20*d*)-এর মধ্যে সময় t অপনয়ন করলে প্রাসটির গতিপথের সমীকরণ পাওয়া যায়।

(19*d*) থেকে দেখা যায়

$$1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{x}{\tau u \cos \alpha}.$$

অর্থাৎ,

$$-t = \tau \log_e \left(1 - \frac{x}{\tau u \cos \alpha}\right). \qquad (21)$$

এই মান (20d)-তে বসিয়ে আসে

$$y=\tau^2 g \log_e\left(1-\frac{x}{\tau u \cos\alpha}\right)+(u\sin\alpha+g\tau)\frac{x}{u\cos\alpha}.$$

সরল করলে লেখা যায়

$$y=x\tan\alpha+\frac{g\tau}{u\cos\alpha}x+\tau^2 g\log_e\left(1-\frac{x}{\tau u\cos\alpha}\right). \quad (22)$$

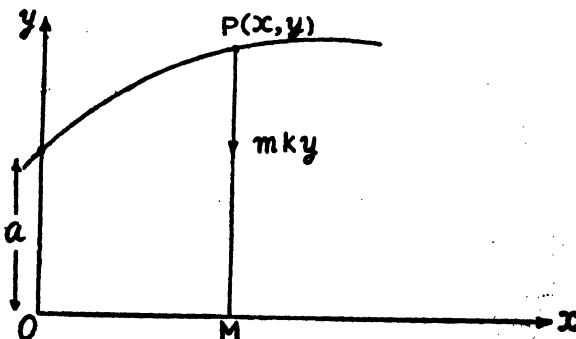
প্রতিরোধী বল ক্ষুদ্র হলে, অর্থাৎ $\frac{1}{\tau}=\frac{k}{m}$ ক্ষুদ্র হলে, $x/\tau u \cos\alpha$ পদটিও ক্ষুদ্র এবং ডান দিকের তৃতীয় পদটিকে τ-র লগারিদম শ্রেণীতে প্রসারিত করা যায়—

$$y=x\tan\alpha+\frac{g\tau}{u\cos\alpha}x+\tau^2 g\left\{-\frac{x}{\tau u\cos\alpha}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\tau^2u^2\cos^2\alpha}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{\tau^3u^3\cos^3\alpha}\cdots\right\}.$$

অর্থাৎ, ক্ষুদ্র ক্রমের পদগুলি বাদ দিলে

$$y=x\tan\alpha-\frac{g\sec^2\alpha}{2u^2}x^2-\frac{g\sec^3\alpha}{\tau u^3}x^3 \quad (23)$$

প্রতিরোধ হীন প্রাসের গতিপথ (13)-র সঙ্গে তুলনা করলে দেখা যায় ডানদিকের তৃতীয় পদটি নতুন, যাকে আমরা প্রতিরোধ-জনিত শুদ্ধিপদ বলতে পারি। (23) থেকে দেখা যাচ্ছে, ভূমি থেকে গতিপথের উচ্চতা প্রতিরোধের ফলে কমে যায়।

উদাহরণ 1. সমতলে গমনরত একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বল

একটি নির্দিষ্ট রেখা থেকে কণাটির দূরত্বের সমানুপাতিক ও বলের দিশা ঐ রেখাটি অভিমুখে হলে, কণাটির গতিপথের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

নির্দিষ্ট রেখাটির উপর কোন একটি বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং নির্দিষ্ট রেখাটিকে x-অক্ষরেখা, এবং O বিন্দুগামী Ox-র লম্বরেখাকে y-অক্ষরেখা ধরা হ'ল। কোন অবস্থিতি P-তে কণাটির স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, প্রশ্নানুসারে x-দিশায় কোন বল নেই এবং y-র দিশায় ক্রিয়াশীল বল F-কে লেখা যায়

$$F = -mky, \ (k > 0)$$

যেখানে m কণাটির ভর এবং k একটি ধ্রুবক। তাহলে x এবং y অক্ষরেখার দিশায়

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \tag{i}$$

এবং

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mky. \tag{ii}$$

(i)-র উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ করে, এবং দুবার সমাকলন করে আসে

$$x = c_1 t + c_2, \tag{iii}$$

যেখানে c_1, c_2 সমাকলন অচর। (ii)-র উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে ও পক্ষান্তর ক'রে পাই

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0, \tag{iv}$$

যা সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ। (iv)-র সাধারণ সমাধান হ'ল

$$y = c_3 \cos \sqrt{k}\, t + c_4 \sin \sqrt{k}\, t. \tag{v}$$

যেখানে c_3 ও c_4 সমাকলন অচর। সমাকলন অচরগুলি আদি দশার সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এখানে আদি দশা প্রদত্ত না হলেও আমরা ধরতে পারি, আদি সময়ে কণাটি x-অক্ষরেখা থেকে a দূরত্বে y-অক্ষরেখায় অবস্থিত। তাহলে,

$$t = 0, \ x = 0, \ y = a.$$

(iii)-এ বসিয়ে আসে

$$0=0+c_2.$$

অতএব, $\quad x=c_1 t.$ (vi)

(v) থেকে আসে

$$a=c_3+0.$$

c_3-র মান (v)-এ বসিয়ে আমরা পাই

$$y=a\cos\sqrt{k}\,t+c_4\sin\sqrt{k}\,t$$

(vi)-র সাহায্য t অপনয়ন ক'রে আসে

$$y=a\cos\frac{\sqrt{k}}{c_1}x+c_4\sin\frac{\sqrt{k}}{c_1}x. \qquad \text{(vii)}$$

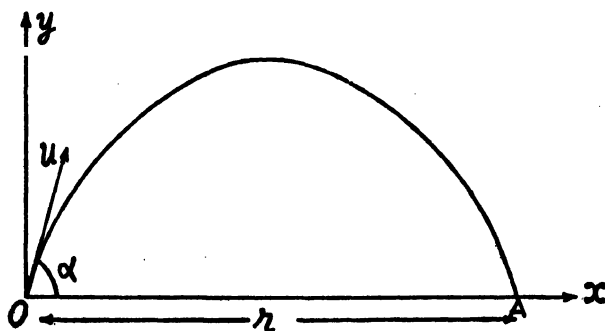
(vii)-কে একটু ভিন্নরূপে লেখা যায়। যদি a এবং c_4-র স্থলে নতুন অচর b এবং ε লেখা হয়, যেখানে

$$a=b\sin\varepsilon \text{ এবং } c_4=b\cos\varepsilon$$

তবে (vii)-র পরিবর্তিত রূপ হয়

$$y=b\sin\left(\frac{\sqrt{k}}{c_1}x+\varepsilon\right),$$

অর্থাৎ কণাটির গতিপথ একটি সাইন-বক্র।

2. একটি কণাকে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হ'ল যে, নিক্ষেপ বিন্দুগামী

আনুভূমিক সমতলে কণাটির পাল্লা r এবং গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতা h. দেখাও যে, ঐ নিক্ষেপ বেগের জন্য চরম আনুভূমিক পাল্লা

$$2h+\frac{1}{8}\frac{r^2}{h}.$$

ধরা যাক, আনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণ ক'রে u বেগে কণাটিকে নিক্ষেপ করা হ'ল। তাহলে, প্রদত্ত সর্তানুসারে কণাটির পাল্লা

$$r=\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha, \tag{i}$$

এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা

$$h=\frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha. \tag{ii}$$

আমরা জানি, u আদি নিক্ষেপ বেগের জন্য প্রাসের চরম পাল্লা হ'ল $\dfrac{u^2}{g}$.

এখন (i)-র উভয়পক্ষের বর্গ ক'রে এবং (ii) দ্বারা ভাগ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{r^2}{h}=\frac{u^4/g^2}{u^2/2g}\cdot\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{u^2}{g}\cdot 8\cos^2\alpha,$$

অর্থাৎ,
$$\frac{u^2}{g}\cos^2\alpha=\frac{1}{8}\frac{r^2}{h}. \tag{iii}$$

(ii)-র উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ ক'রে, (iii)-র সঙ্গে যোগ করলে আসে

$$2h+\frac{1}{8}\frac{r^2}{h}=\frac{u^2}{g}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\frac{u^2}{g}=\text{ চরম পাল্লা ।}$$

প্রশ্নমালা 3(ক)

1. সমুদ্রপৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় পাহাড়ের উপর একটি দুর্গ অবস্থিত। সমুদ্রে অবস্থিত একটি জাহাজ থেকে $\sqrt{2gu}$ আদি বেগে নিক্ষিপ্ত কামানের গোলা দ্বারা দুর্গে আঘাত করতে হলে, দেখাও যে, জাহাজটির আনুভূমিক দূরত্ব $2\sqrt{u(u-h)}$-এর বেশি হতে পারে না।

2. H-উচ্চতা বিশিষ্ট একটি মিনারের শীর্ষদেশ থেকে U বেগে একটি কণাকে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হ'ল যে কণাটি মিনারের পাদদেশ থেকে দূরতম বিন্দুতে মাটিতে আঘাত করে। দেখাও যে এই দূরত্ব হ'ল

$$\frac{\mathrm{U}(\mathrm{U}^2+2g\mathrm{H})^{1/2}}{g}.$$

3. আনুভূমিক সমতলে একটি কামানের পাল্লা d মিটার। যদি সম্ভবপর দুটি পথে সর্বোচ্চ উচ্চতা h এবং h' মিটার হয়, তবে দেখাও যে

$$d = 4\sqrt{hh'} \text{ মিটার।}$$

4. সমতলে গমনরত একটি কণার অবস্থিতি-ভেক্টর, t-সময়ে

$$\mathbf{r} = (2+4t)\,\mathbf{i} + (15-16t+4t^2)\,\mathbf{j}$$

যেখানে x ও y-অক্ষরেখার দিশায় একক ভেক্টর $\mathbf{i}$ ও $\mathbf{j}$. কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। কখন বেগ অবস্থিতি-ভেক্টরের উপর লম্ব হবে ?

5. সমতলে গমনরত একটি কণার ত্বরণ, t-সময়ে $\dfrac{2\mathbf{a}}{t^3}$, এবং যখন $t=1$, তখন কণাটির অবস্থিতি-ভেক্টর ও ত্বরণ যথাক্রমে $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ এবং $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, যেখানে $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ দুটি নির্দিষ্ট ভেক্টর, যারা একরেখীয় নয়। দেখাও যে, কণাটির গতিপথ একটি পরাবৃত্ত।

6. একটি কণাকে O বিন্দু থেকে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হ'ল, যাতে কণাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A দিয়ে যেতে পারে। A বিন্দুটি, O বিন্দুর আনুভূমিক সমতলের সঙ্গে β কোণ করে এমন একটি সমতলের উপর, O বিন্দু থেকে a দূরত্বে অবস্থিত। কণাটিকে নিক্ষেপ করার ক্ষুদ্রতম বেগ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুটি O বিন্দু থেকে

$$a\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) \text{ উঁচুতে}$$

7. উল্লম্ব সমতলে আনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণে একটি কণাকে U বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। কখন কণাটি আদি দিশার সঙ্গে লম্বভাবে গমন করবে এবং তখন কণাটির বেগ কত হবে নির্ণয় কর।

8. উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত একটি ত্রিভুজের ভূমিস্থ শীর্ষবিন্দু থেকে একটি কণাকে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হ'ল, যে কণাটি ঊর্ধ্বতম শীর্ষবিন্দু স্পর্শ ক'রে ভূমিতে এসে অপর শীর্ষবিন্দুতে পৌঁছায়। ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোণদ্বয় θ ও θ' হলে এবং আনুভূমিক রেখার সঙ্গে আদি নিক্ষেপ কোণ α হলে, দেখাও যে

$$\tan\alpha = \tan\theta + \tan\theta'.$$

9. উল্লম্ব সমতলে, একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে U দ্রুতিতে, ভিন্ন ভিন্ন দিশায় একাধিক কণা নিক্ষেপ করা হ'ল। দেখাও যে t-সময়ে কণাগুলি Ut ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

10. আনুভূমিক রেখা থেকে h উর্ধ্বে অবস্থিত একটি বিন্দু থেকে দুটি কণাকে উল্লম্ব সমতলে U দ্রুতিতে, পরস্পর বিপরীত দিশায় নিক্ষেপ করা হ'ল। যদি $U^2 > 2gh$ হয়, তবে দেখাও যে কণা-দুটি ভূমিকে যে বিন্দুদ্বয়ে আঘাত করে, তাদের মধ্যে চরম দূরত্ব

$$\frac{U^2}{g} + 2h.$$

11. অর্ধ-বৃত্তাকার পথে একটি কণা গমন করছে। কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল, অর্ধবৃত্তের দুই প্রান্ত যোগকারী ব্যাসের লম্ব দিশায়, সর্বদা ব্যাস অভিমুখে ক্রিয়া করছে। দেখাও যে ক্রিয়াশীল বল, ব্যাস থেকে কণাটির লম্ব-দূরত্বের তৃতীয় ঘাতের ব্যস্ত সমানুপাতিক।

12. সমতলে গমনরত একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বল সমতলস্থ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে কণাটির লম্ব-দূরত্বের বর্গের ব্যস্ত সমানুপাতিক এবং বলের দিশা ঐ রেখা অভিমুখে। আদি অবস্থায় কণাটিকে ঐ রেখা থেকে a দূরত্বে, u বেগে রেখাটির সমান্তরাল ক'রে, নিক্ষেপ করা হলে কণাটির গতিপথ নির্ণয় কর।

13. প্রতিরোধী মাধ্যমে একটি কণাকে আনুভূমিক রেখার সঙ্গে β কোণে u_0-দ্রুতিতে নিক্ষেপ করা হ'ল। প্রতি একক ভরের জন্য মাধ্যমটির প্রতিরোধ $\frac{1}{\tau} \times$(দ্রুতি)। দেখাও যে আবার আনুভূমিক রেখার সঙ্গে (ঐ রেখার নিচের দিকে) β কোণ করতে কণাটির যে সময় লাগবে, তা হ'ল

$$\tau \; ln\left\{1 + \frac{2u_0}{\tau g} \sin \beta\right\}.$$

14. দ্রুতির সমানুপাতিক প্রতিরোধ-বিশিষ্ট মাধ্যমে একটি কণাকে নিক্ষেপ করা হলে, মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণ ধ্রুবক ধ'রে দেখাও যে কণাটির ত্বরণ একটি নির্দিষ্ট দিশা-বিশিষ্ট হবে এবং পরিমাণ হ্রাস পেয়ে শূন্য হয়।

15. একটি কণাকে মূলবিন্দু থেকে আনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণে U বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। কণাটির গতিতে বায়ুর প্রতিরোধ প্রতি একক

ভরের জন্য $-\lambda \mathbf{v}$, যেখানে $\mathbf{v}$ কণাটির বেগ সূচিত করে। মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণ g ধ্রুবক ধ'রে দেখাও যে মূলবিন্দু থেকে কণাটির আনুভূমিক দূরত্ব $(U \cos \alpha)/\lambda$-র অধিক হতে পারে না এবং মূলবিন্দুর আনুভূমিক রেখা থেকে কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা

$$\frac{U \sin \alpha}{\lambda} - \frac{g}{\lambda^2} ln \left(1 + \frac{\lambda U \sin \alpha}{g}\right)$$

16. প্রতিরোধী মাধ্যমে একটি কণাকে (u_0, v_0) আনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ-বিশিষ্ট বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। প্রতি একক ভরের জন্য প্রতিরোধ $\frac{1}{\tau} \times$ (বেগ)। $\frac{1}{\tau}$ একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা হলে দেখাও যে নিক্ষেপবিন্দুর আনুভূমিক সমতলে কণাটির পাল্লা

$$\frac{2u_0 v_0}{g} - \frac{8}{3\tau g^2} u_0 v_0^2, \text{ প্রায়।}$$

উত্তরমালা 3

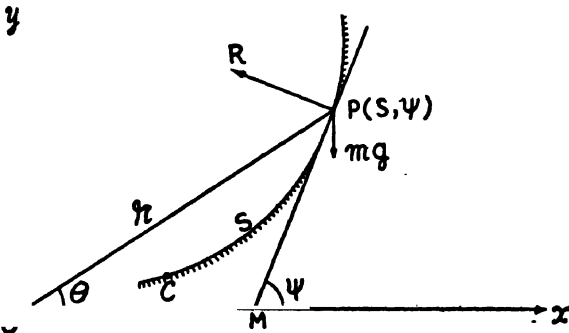
4. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + (8t - 16)\mathbf{j}$, $\mathbf{f} = 8\mathbf{j}$; $t = 1$, $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

6. $\sqrt{2ga} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$.

7. $t = \frac{U}{g} \sin \alpha$; $U \cot \alpha$.

3·4. সবাধ গতির সহজ সমস্যা—কোন মাঠে একটি গরু বিচরণ ক'রে বেড়াচ্ছে। গরুটি মুক্ত এবং তার গতিকে **মুক্ত** বা **অবাধ** গতি ব'লে ভাবা যায়। কিন্তু যদি কোন দড়ির সাহায্যে গরুটিকে একটি খুঁটির সঙ্গে বেঁধে রাখা হয়, তবে গরুটির গতিতে দড়ি বাঁধা সৃষ্টি করবে। কাজেই এক্ষেত্রে দড়ি হ'ল গরুটির গতির **প্রতিবন্ধক**, এবং গরুটির গতিকে **প্রতিবন্ধক-যুক্ত** বা **সবাধ গতি** বলা হয়। আবার, যদি কোন পিঁপড়া একটি গোলকের উপর অবস্থান করে এবং গোলকের পৃষ্ঠতলের উপর গমনাগমন করে, তবে গোলকের পৃষ্ঠতল হ'ল পিঁপড়াটির গতির প্রতিবন্ধক—কারণ পিঁপড়াটি গোলক ভেদ ক'রে ভিতরে প্রবেশ করতে পারে না। দৈনন্দিন জীবনে এরূপ অসংখ্য প্রতিবন্ধকের উদাহরণ আমাদের চোখে পড়ে। বর্তমান পুস্তকে, ইতিপূর্বে যে সমস্ত গতির সমস্যা আলোচনা করা হয়েছে, তার

সবগুলিই মুক্ত বা অবাধ গতির উদাহরণ। বর্তমান অনুচ্ছেদে সবাধ গতির সহজ সমস্যা আলোচনা করা হবে।

কোন কণার গতি যদি এমন হয় যে কণাটি একটি বক্রের উপর থাকতে বাধ্য, তাহলে কণা এবং বক্রের মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার সৃষ্টি হয়। কণাটি বক্রের উপর যে ক্রিয়া করে, কণাটির উপর বক্রের ক্রিয়া তার সমপরিমাণ ও বিপরীতমুখী হয়। কণাটির গতির আলোচনায়, কণার উপর ক্রিয়াশীল বলের মধ্যে কণাটির উপর বক্রের ক্রিয়া—যাকে সংক্ষেপে **বক্রের প্রতিক্রিয়া** বলা হয়, ধরতে হবে। যতক্ষণ বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান ধনাত্মক থাকবে, ততক্ষণ কণাটি বক্রের উপর থাকবে। এই প্রতিক্রিয়ার মান শূন্য হলে কণাটির সঙ্গে বক্রের সংস্পর্শ নেই, এবং ঋণাত্মক হলে কণাটি বক্র ত্যাগ ক'রে গেছে, বুঝতে

চিত্র 3·7—বক্রের উপর সবাধ গতি

হবে। যদি বক্রটি **মসৃণ** হয়, তবে বক্রের প্রতিক্রিয়া অভিলম্ব দিশায় বক্র থেকে কণা অভিমুখে ক্রিয়া করে। এরূপ ক্ষেত্রে আন্তর্স্থানাঙ্কের প্রয়োগে গাণিতিক দিক থেকে সুবিধা হয় (চিত্র 3·7)। উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত কোন বক্রের উপর মাধ্যাকর্ষণ-জনিত কণার গতি নিম্নে আলোচনা করা হচ্ছে :

(ক) মসৃণ বক্রের উপর মাধ্যাকর্ষণ-জনিত কণার গতি—উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত একটি মসৃণ বক্রের উপর কণাটি গমন করছে। মাধ্যাকর্ষণ-জনিত কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে। চিত্র 3·7-এ m ভরবিশিষ্ট কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বলগুলি দেখানো হয়েছে। বক্রের উপর অবস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু C থেকে কণা $P(x,y)$-র দূরত্ব s এবং P বিন্দুতে স্পর্শক PM আনুভূমিক দিশা ox-র সঙ্গে ψ কোণ করে ধরা হ'ল। তাহলে, স্পর্শকের

দিশায় s বৃদ্ধি অভিমুখে, অর্থাৎ MP অভিমুখে বলগুলির উপাংশের যোগফল হ'ল

$$F_s = -mg \sin \psi, \tag{24a}$$

আর, অভিলম্ব দিশায় বক্রতা-কেন্দ্র অভিমুখে বলগুলির উপাংশের যোগফল হ'ল

$$F_\psi = R - mg \cos \psi, \tag{24b}$$

যেখানে বক্রের প্রতিক্রিয়া R দ্বারা সূচিত হয়েছে। (24a), (24b) থেকে F_s ও F_ψ-র মান (4)-এ বসিয়ে স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় কণাটির গতীয় সমীকরণ আসে

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \psi, \tag{25a}$$

এবং

$$m\frac{v^2}{\rho} = R - mg \cos \psi, \tag{25b}$$

যেখানে ρ প্রদত্ত বক্রটির বক্রতা-ব্যাসার্ধ সূচিত করে। কিন্তু, আমরা জানি

$$\sin \psi = \frac{dy}{ds},$$

এবং

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.$$

কাজেই, (25a)-কে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$mv\frac{dv}{ds} = -mg\frac{dy}{ds}.$$

s সাপেক্ষে সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v_1^2 = -mg(y - y_1); \tag{26}$$

যেখানে আদি অবস্থায় কণাটির কোটি y_1 এবং বেগ v_1. (26)-র বাঁদিক, আদি অবস্থা থেকে (x, y) অবস্থায় আসতে কণাটির গতীয় শক্তির পরিবর্তন

সূচিত করে, আর ডানদিক হ'ল, এই অবস্থার পরিবর্তনে মাধ্যাকর্ষণ-জনিত বলের দ্বারা সাধিত কর্ম। এই সমীকরণকে **শক্তি সমীকরণ** বলা হয়। আবার, পক্ষান্তর দ্বারা (26)-কে নিম্নরূপে লেখা যায়—

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \text{ধ্রুবক} \qquad (26')$$

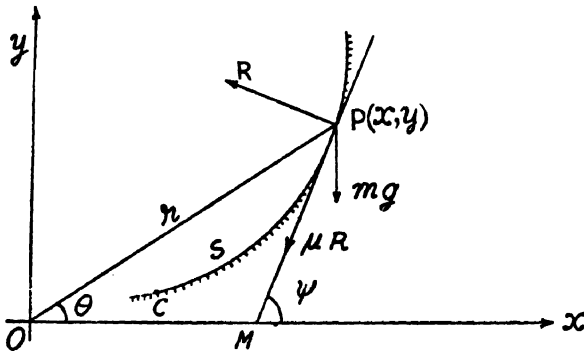
যা গতীয় শক্তি এবং স্থৈতিক শক্তির যোগফলের নিত্যতা সূচিত করে। লক্ষ্য করার বিষয়, শক্তি সমীকরণ (26)-এ বক্রের প্রতিক্রিয়া অনুপস্থিত। (26)-র উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, পক্ষান্তর ক'রে আমরা পাই

$$v^2 = v_1^2 - 2g(y - y_1). \qquad (27)$$

এই মান $(25b)$-তে বসিয়ে পক্ষান্তর দ্বারা বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান আসে

$$R = m\left[\frac{v_1^2 - 2g(y - y_1)}{\rho} + g\cos\psi\right]. \qquad (28)$$

বক্রটি প্রদত্ত ব'লে, $\rho = \dfrac{ds}{d\psi}$ এবং ψর মান বক্রস্থ সকল বিন্দুতে জানা। কাজেই, এখান থেকে প্রতিক্রিয়ার মান নির্ণয় করা যায়।

(খ) অমসৃণ বক্রের উপর মাধ্যাকর্ষণ-জনিত কণার গতি—এক্ষেত্রে উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত বক্রটিকে অমসৃণ ধরা হচ্ছে। ঘর্ষণ কণাটির

চিত্র 3·8—অমসৃণ বক্রের উপর মাধ্যাকর্ষণ-জনিত কণার গতি

গতিকে প্রতিরোধ করার চেষ্টা করে এবং ঘর্ষণজনিত বল গতির বিপরীত দিশায় ক্রিয়া করে, যার পরিমাণ হ'ল μR, যেখানে μ হ'ল ঘর্ষণাঙ্ক (চিত্র 3·8)। এতদ্ব্যতীত অন্যান্য বলগুলি পূর্বের ক্ষেত্রের ন্যায়।

এক্ষেত্রে স্পর্শকের দিশায়, s বৃদ্ধি অভিমুখে, অর্থাৎ MP অভিমুখে ক্রিয়াশীল বলগুলির উপাংশের যোগফল হ'ল

$$F_s = -mg \sin \psi - \mu R \tag{29a}$$

এবং অভিলম্ব দিশায়, বক্রতা-কেন্দ্র অভিমুখে বলগুলির উপাংশের যোগফল হ'ল

$$F_\psi = R - mg \cos \psi. \tag{29b}$$

সুতরাং (4) অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \psi - \mu R \tag{30a}$$

এবং

$$m \frac{v^2}{\rho} = R - mg \cos \psi. \tag{30b}$$

(30b)-র উভয়পক্ষকে μ দ্বারা গুণ ক'রে এবং (30a)-র সঙ্গে যোগ ক'রে, বক্রের প্রতিক্রিয়া R অপনীত হয়। আমরা পাই

$$m\left[\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\mu v^2}{\rho}\right] = -mg \sin \psi - \mu mg \cos \psi.$$

এখান থেকে $\frac{d^2s}{dt^2} = v\frac{dv}{ds}$ এবং $\rho = \frac{ds}{d\psi}$ ব'লে, উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + \mu v^2 \frac{d\psi}{ds} = -g(\sin \psi + \mu \cos \psi).$$

সুতরাং, উভয়পক্ষকে $2\frac{ds}{d\psi}$ দ্বারা গুণ করলে দাঁড়ায়

$$\frac{dv^2}{d\psi} + 2\mu v^2 = -2g(\sin \psi + \mu \cos \psi)\frac{ds}{d\psi} \tag{31}$$

(31) একটি প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ। এই সমীকরণের একটি সমাকলন-গুণক হ'ল $e^{2\mu\psi}$. উভয়পক্ষকে এই গুণক দ্বারা গুণ ক'রে লেখা যায়—

$$\frac{d}{d\psi}(e^{2\mu\psi}.\, v^2) = -2g(\sin \psi + \mu \cos \psi)\frac{ds}{d\psi}e^{2\mu\psi}$$

সমাকলন করলে আসে

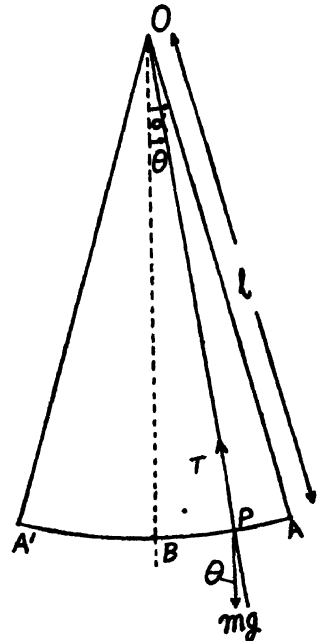
$$e^{2\mu\psi}v^2 = -2g\int(\sin\psi+\mu\cos\psi)\frac{ds}{d\psi}e^{2\mu\psi}d\psi+c, \qquad (32)$$

যেখানে সমাকলন অচর c-র মান আদি দশার সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। বক্র প্রদত্ত হওয়ার ফলে $\frac{ds}{d\psi}$ একটি জ্ঞাত রাশি। সুতরাং সমাকলন দ্বারা (32)-র ডানদিক নিরূপণ করা যায়। (32) থেকে v^2-র মান নির্ণয়ের পর (30b) থেকে বক্রের প্রতিক্রিয়া নির্ধারণ করা যায়। আর $v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{dt}$ ব'লে (32)-কে সময়সাপেক্ষে আর একবার সমাকলন ক'রে, সময়সাপেক্ষে কণাটির অবস্থিতি নির্ণয় করা যায়।

3·5. সরল দোলকের গতি—সবাধ গতির একটি সুপরিচিত উদাহরণ হ'ল সরল দোলকের গতি। সরল দোলক বলতে বুঝায় একটি ভারী কণা যাকে একটি হাল্কা সরু দীর্ঘ সম্প্রসারণ-হীন রজ্জুর সাহায্যে, কোন একটি স্থিরবিন্দু থেকে শূন্যে ঝুলিয়ে দেওয়া হয়। ধরা যাক, আদি অবস্থায় রজ্জুটি উল্লম্ব নিম্নাভিমুখী দিশা OB-র সঙ্গে একটি ক্ষুদ্র কোণ α করে (চিত্র 3·9) এবং এই অবস্থায় কণাটিকে ছেড়ে দিলে, দেখা যায় কণাটি উল্লম্ব সমতলে গমনাগমন করতে থাকে। কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে।

চিত্র 3·9—সরল দোলকের গতি

ধরা যাক, OP রজ্জুটির দৈর্ঘ্য l, যেখানে O স্থির বিন্দু এবং P বিন্দুতে m ভরবিশিষ্ট কণাটিকে আটকানো হয়েছে। t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি P, যেখানে $\angle POB=\theta$. রজ্জুটির টান T ধরা হ'ল। O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধ'রে, স্থির দিশা OB সাপেক্ষে P বিন্দুর ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক হ'ল (l,θ). তাহলে, অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় l এবং θ-বৃদ্ধি অভিমুখে মোট ক্রিয়াশীল বলের উপাংশগুলি হ'ল

$$F_r = mg\cos\theta - T,$$

এবং $$F_\theta = -mg\sin\theta.$$

সুতরাং (3) অনুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণ অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় যথাক্রমে (l-সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় না, লক্ষ্য ক'রে)

$$m(0-l\dot{\theta}^2)=mg\cos\theta-T, \tag{33a}$$

এবং $$m\frac{1}{l}\frac{d}{dt}(l^2\dot{\theta})=-mg\sin\theta. \tag{33b}$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, ও সরল ক'রে (33*b*) থেকে পাওয়া যায়

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta. \tag{34}$$

θ কোণটির মান ক্ষুদ্র ধরা হলে, আমরা জানি, আসন্নভাবে (θ-কে রেডিয়ানে পরিমাপ ক'রে)

$$\sin\theta \simeq \theta. \tag{35}$$

এই মান (34)-এ বসিয়ে এবং উভয়পক্ষকে l দ্বারা ভাগ করলে দাঁড়ায়

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta. \tag{36}$$

(2·51) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করলে দেখা যায়, (36) একটি সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ। এখানে $\mu=\frac{g}{l}\ (>0)$, ব'লে

(36)-র সাধারণ সমাধান হ'ল

$$\theta=c_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+c_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t, \tag{37}$$

যেখানে c_1 এবং c_2 অচর। এক্ষেত্রে, আদি দশা ধরা হ'ল (আদি অবস্থায় কণাটির বেগ শূন্য)

$$t=0,\ \theta=\alpha,\ \dot{\theta}=0. \tag{38}$$

কাজেই, 2·6. অনুচ্ছেদের ন্যায় c_1 ও c_2 অচরদ্বয় নির্ণয়ের সমীকরণ হ'ল,

$$\alpha=c_1,$$

এবং $$0=c_2\sqrt{\frac{g}{l}},\ \text{অর্থাৎ}\ c_2=0.$$

এই মান (37)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\theta = \alpha \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t. \tag{39}$$

এক্ষেত্রে, কণাটির গতি একটি সরল সমঞ্জস গতি, যার বিস্তার α এবং পর্যায়কাল $= 2\pi / \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. লক্ষ্য করার বিষয় যে পর্যায়কাল বিস্তারের উপর নির্ভর করে না। কণাটি $A(\theta = \alpha)$ বিন্দু থেকে $A'(\theta = -\alpha)$ পর্যন্ত গিয়ে আবার A বিন্দুতে ফিরে আসে, এবং এরূপ দোলনগতিতে গমনাগমন করতে থাকে।

(33a) থেকে রজ্জুটির টানের মান নির্ণয় করা যায়। (39) থেকে $\dot{\theta}$-র মান (33a)তে বসিয়ে সরল ক'রে আমরা পাই

$$T = m\left[g \cos \theta + \alpha^2 g \sin^2 \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right]. \tag{40}$$

উপরের আলোচনায় θ-র মান ক্ষুদ্র ধরা হয়েছে। θ-র মান যদি ক্ষুদ্র না হয়, তবে (35) খাটে না। সেক্ষেত্রে (34)-কে সমাধান করার জন্য, আমরা লক্ষ্য করি যে

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \left\{\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta})\right\}\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}^2).$$

কাজেই, (34)-কে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}^2) = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

$\theta = \alpha$ অবস্থায় $\dot{\theta} = 0$ ধ'রে, θ সাপেক্ষে $\theta = \alpha$ থেকে θ-র মধ্যে সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\dot{\theta}^2 - 0 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha). \tag{41a}$$

বর্গমূল গ্রহণ ক'রে, এবং সময়ের সঙ্গে θ হ্রাস পাচ্ছে ব'লে ঋণাত্মক চিহ্নটি গ্রহণ ক'রে, আমরা পাই

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}(\cos\theta - \cos\alpha)^{\frac{1}{2}}. \tag{41b}$$

সুতরাং, $$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (41c)$$

উপবৃত্তীয় ফাংশনের সাহায্যে ডানদিকের পদটির সমাকলন করা যায়। উপবৃত্তীয় ফাংশনের আসন্নমানের প্রস্তুত তালিকা পাওয়া যায়। অন্য কোন জ্ঞাত ফাংশনের রূপে (41c)-র যথার্থ সমাকলন করা যায় না।

রজ্জুর টানের মান (33a) এবং (41a) থেকে আসে

$$T = mg[\cos\theta + 2(\cos\theta - \cos\alpha)]$$
$$= mg[3\cos\theta - 2\cos\alpha].$$

A বিন্দু থেকে B বিন্দু পর্যন্ত আসতে কণাটির যে সময়ের প্রয়োজন তাকে t_0 বললে, $\theta = \alpha$ থেকে $\theta = 0$-র মধ্যে (41c)-র সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$t_0 = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\alpha}^{0} \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (42)$$

$$\cos\theta - \cos\alpha = \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

এই মান, (42)-এ বসিয়ে সরল করলে আসে

$$t_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}} \qquad (42')$$

(42′)-র ডান দিকে $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$ (43)

বসালে, সরল করা যায়। আমরা দেখি, এই প্রতিস্থাপনের জন্য

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\,d\phi,$$

এবং $\theta = 0$ হলে $\varphi = 0$, ও $\theta = \alpha$ হলে $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

এই মান, (42′)এ বসিয়ে সরল করলে আসে

$$t_0 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\ \sin^2\varphi\right)^{1/2}}. \qquad (44a)$$

উপবৃত্তীয় সমাকলনের সাহায্যে (44a)-কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$t_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}\, K, \qquad (44b)$$

যেখানে K প্রথম জাতীয় উপবৃত্তীয় সমাকল সূচিত করে। K-র মান α-র উপর নির্ভর ক'রে এবং $\frac{\alpha}{2}$-র মান প্রদত্ত হলে, সরাসরি তালিকা থেকে K-র আসন্নমান পড়ে নেওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ, আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত :

$\frac{\alpha}{2}$	$K\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
0°	1·5708
5°	1·5738
10°	1·5828
15°	1·5981
20°	1·6200
30°	1·6858
40°	1·7868
45°	1·8541

তালিকা—
উপবৃত্তীয় ফাংশন তালিকার নমুনা।

আবার, দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে (44a)-র ডানদিককে $\sin^2\varphi$-র একটি শ্রেণীতে প্রসারিত ক'রে এবং প্রত্যেক পদের সমাকলন ক'রেও t_0-র আসন্নমান

নির্ণয় করা যায়। $\sin^2\frac{\alpha}{2}$-এর মান এক, এর চেয়ে ক্ষুদ্র ধ'রে নিয়ে দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,

$$t_0=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi\right)^{-1/2}d\varphi$$

$$=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left[1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\sin^4\frac{\alpha}{2}\;\sin^4\varphi+\cdots\right]d\varphi. \quad (45)$$

সমাকলনের সুপরিচিত সূত্র অনুযায়ী

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4},\quad \text{এবং}\quad \int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{3\pi}{16}.$$

(45)-র ডানদিকের দ্বিতীয় এবং তৃতীয় পদের সমাকলনে এই মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$t_0=\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\;\frac{\pi}{4}+\frac{3}{8}\;\sin^4\frac{\alpha}{2}\;\frac{3\pi}{16}+\cdots\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cdots\right]. \quad (46)$$

এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে, A থেকে B বিন্দু পর্যন্ত আসতে যে সময় লাগে, তা α-র উপর নির্ভরশীল। B বিন্দুতে $\theta=0$ ব'লে, কণাটির ত্বরণের মান (34) থেকে দেখা যায়, শূন্য। এই বিন্দুতে $\dot{\theta}$-র মান $(41b)$ থেকে দেখা যায় $-\sqrt{\frac{2g}{l}}(1-\cos\alpha)^{1/2}$; অর্থাৎ AB অভিমুখে কণাটির বেগ রয়েছে, যার ফলে কণাটি B বিন্দু অতিক্রম ক'রে A$'$ বিন্দু পর্যন্ত পৌঁছবে, যে বিন্দুতে $\dot{\theta}$-র মান শূন্য হবে অর্থাৎ $\theta=-\alpha$. সেই বিন্দুতে কণাটির অনুপ্রস্থ ত্বরণ হ'ল (34) অনুযায়ী

$$l\left.\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]_{\theta=-\alpha}=g\sin\alpha>0,$$

অর্থাৎ ত্বরণ A$'$A অভিমুখে, যার ফলে কণাটি ঐদিকে গমন করবে এবং অনুরূপ যুক্তি দিয়ে বোঝা যায়, A বিন্দুতে ফিরে আসবে। কণাটির গতি

দোলনগতি হবে। গতির প্রতিসাম্য থেকে বলা যায়, কণাটির পর্যায়কাল হ'ল A থেকে B পর্যন্ত আসতে যে সময়ের প্রয়োজন, তার চারগুণ। কাজেই (46) থেকে

$$\text{পর্যায়কাল} = 4\,t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cdots\right]. \tag{47}$$

আমরা জানি $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

কাজেই

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\alpha^2+\cdots,\ \text{এবং}\ \sin^4\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{256}\alpha^4+\cdot$$

সুতরাং, (47) থেকে দেখা যায়, যে যদি α কোণটি এত ছোট হয় যে তার বর্গ এবং উচ্চতর ঘাত-সকল অবজ্ঞা করা চলে, তাহলেই কেবল পর্যায়-কালের মান আসে $2\pi\sqrt{l/g}$ আর α^4 এবং উচ্চতর সকল ঘাত অবজ্ঞা করলে (47) থেকে পর্যায়কালের আসন্নমান পাওয়া যায় (α^3-র সহগ শূন্য লক্ষ্য ক'রে),

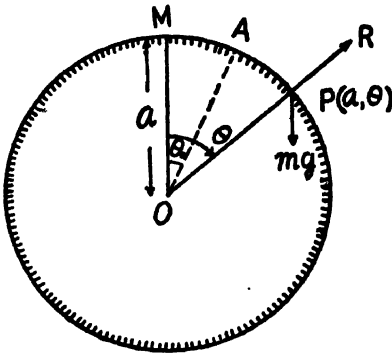
$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\alpha^2+\cdots\right]$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{\alpha^2}{16}\right]. \tag{48}$$

এই মান বিস্তার α-র উপর নির্ভরশীল।

3·6. উল্লম্ব সমতলস্থ মসৃণ বৃত্তাকার বক্রে কণার গতি—সবাধ গতির আর একটি সহজ উদাহরণ এখানে আলোচনা করা হবে। উল্লম্ব সমতলে একটি মসৃণ বৃত্তাকার বক্র অবস্থিত রয়েছে। বক্রটির উপর (ভিতরের বা বাইরের ধারে) একটি ভারী কণার গতি নির্ণয় করতে হবে।

প্রথম ক্ষেত্রে ধরা হচ্ছে যে কণাটি বক্রের উপর বাইরের অর্থাৎ উত্তল ধারে রয়েছে এবং বক্রটি বেয়ে উপর থেকে নিচের দিকে গড়িয়ে পড়ছে। কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে। বৃত্তাকার বক্রটির কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ

a ধরা হ'ল। O থেকে উল্লম্ব রেখা OM, বৃত্তটিকে ঊর্ধ্বতম M বিন্দুতে ছেদ করেছে। আদি অবস্থায় কণাটি A বিন্দুতে অবস্থিত, যেখানে $\angle MOA = \theta_0$. ধরা যাক, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি P, যেখানে $\angle MOP = \theta$. তাহলে, স্থির দিশা OM সাপেক্ষে t-সময়ে কণাটির ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক হ'ল (a, θ). কণাটি বাইরের ধারে আছে ব'লে, বক্রের প্রতিক্রিয়া R, OP অভিমুখে ক্রিয়া করবে। কণাটির ভর m ধরা হ'ল। ধ্রুবীয় স্থানাঙ্কে কণাটির গতীয় সমীকরণ লিখে, সমাকলন দ্বারা সমস্যাটির সমাধান করা সম্ভব। কিন্তু, এক্ষেত্রে শক্তি সমীকরণ (26) অথবা (26′)-এর ব্যবহার আরও সুবিধাজনক।

চিত্র 3·10—মসৃণ বৃত্তাকার বক্রের উপর বাইরের তলে কণার গতি

t-সময়ে কণাটির বেগ v হলে, কণাটির গতীয় শক্তি হ'ল $\frac{1}{2}mv^2$. আর স্থৈতিক শক্তি হ'ল $mg\, a \cos\theta$, যেখানে O বিন্দুগামী আনুভূমিক রেখায় স্থৈতিক শক্তির মান শূন্য ধরা হয়েছে। আর, আদি অবস্থায় কণাটির বেগ শূন্য হলে, তখন গতীয় শক্তির মান শূন্য এবং স্থৈতিক শক্তি হ'ল $mg\, a \cos\theta_0$. কাজেই, (26′) অনুযায়ী শক্তি সংরক্ষণ সমীকরণ হ'ল

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mg\, a\cos\theta = 0 + mg\, a\cos\theta_0.$$

পক্ষান্তর ক'রে, $\frac{m}{2}$ দ্বারা ভাগ করলে আসে

$$v^2 = 2ga(\cos\theta_0 - \cos\theta). \qquad (49)$$

এক্ষেত্রে বক্রটি a ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত ব'লে, বক্রটির বক্রতা-ব্যাসার্ধ হ'ল a. অভিলম্ব দিশায় বক্রতা-কেন্দ্র O অভিমুখে গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{v^2}{a} = mg\cos\theta - R$$

এখানে (49) থেকে v^2-এর মান বসিয়ে সরল করলে বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান আসে

$$R = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0). \qquad (50)$$

(50) থেকে দেখা যায়, যখন

$3 \cos \theta = 2 \cos \theta_0$, অর্থাৎ, যখন

$$\cos \theta = \tfrac{2}{3} \cos \theta_0, \tag{51}$$

তখন বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান শূন্য হয়। এই সময়ে কণাটির সঙ্গে বক্রের সংস্পর্শ থাকে না। (50) থেকে লক্ষ্য করা যায়, যে এর পর θ-র মান বৃদ্ধির জন্য cos θ-র মান হ্রাস পায় ব'লে, $R < 0$ হয়। সুতরাং কণাটি বক্র ত্যাগ ক'রে যায়। অতঃপর, কণাটির গতি হয় মুক্ত গতি, মাধ্যাকর্ষণ-জনিত প্রাসের গতির ন্যায়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, ধরা হচ্ছে যে **কণাটি বক্রের উপর ভিতরের দিকে রয়েছে** অর্থাৎ অবতল ধারে রয়েছে। উল্লম্ব রেখায় বক্রের সর্বনিম্ন বিন্দু N থেকে কণাটিকে u বেগে আনুভূমিক দিশায় ছুঁড়ে দেওয়া হ'ল (চিত্র 3·11)। কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে।

চিত্র 3·11—বৃত্তাকার বক্রের অভ্যন্তরে কণার গতি

t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি P যদি ON রেখার সঙ্গে θ কোণ করে, তবে স্থির দিশা ON সাপেক্ষে P বিন্দুর ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক হ'ল (a, θ). পূর্ব ক্ষেত্রের ন্যায় এক্ষেত্রেও আমরা শক্তি সমীকরণের ব্যবহার ক'রব। N বিন্দুর আনুভূমিক দিশায় স্থৈতিক শক্তি শূন্য ধ'রে, P বিন্দুতে কণাটির স্থৈতিক শক্তি হ'ল $mg(a - a\cos\theta)$, আর গতীয় শক্তি হ'ল $\frac{1}{2}mv^2$. আদি অবস্থিতি N বিন্দুতে স্থৈতিক শক্তি শূন্য, এবং গতীয় শক্তি হ'ল $\frac{1}{2}mu^2$. কাজেই (26′) অনুযায়ী শক্তি সংরক্ষণের সমীকরণ হ'ল

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mg(a - a\cos\theta) = \tfrac{1}{2}mu^2 + 0.$$

উভয়পক্ষকে $\frac{m}{2}$ দ্বারা ভাগ ক'রে এবং পক্ষান্তর ক'রে আসে,

$$v^2 = u^2 - 2ga(1 - \cos\theta) \tag{52}$$

আর অভিলম্ব দিশায় বক্রতা-কেন্দ্র O অভিমুখে গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{v^2}{a}=R-mg\cos\theta.$$

(52) থেকে v^2-র মান এখানে বসিয়ে, সরল করলে বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান আসে

$$R=\frac{m}{a}[u^2+ga(3\cos\theta-2)]. \qquad (53)$$

(52) থেকে দেখা যায়, কণাটির বেগ শূন্য হবে, যখন

$$u^2-2ga(1-\cos)=0$$

অর্থাৎ, যখন

$$\cos\theta=1-\frac{u^2}{2ga}. \qquad (54a)$$

কিন্তু $\cos\theta$-র মান $+1$ ও -1-এর মধ্যে থাকবে। অতএব $-1\leq 1-\frac{u^2}{2ga}\leq 1$ হলেই কেবল কণাটির বেগ কোন বিন্দুতে শূন্য হতে পারে। আর (53) থেকে দেখা যায় কণাটি বক্রের সংস্পর্শ ত্যাগ করবে, যখন

$$u^2+ga(3\cos\theta-2)=0,$$

অর্থাৎ, যখন

$$\cos\theta=\frac{2}{3}-\frac{u^2}{3ga}. \qquad (54b)$$

লক্ষ্য করার বিষয় যে $-1\leq\frac{2}{3}-\frac{u^2}{3ga}\leq 1$ হলেই কেবল কোন বিন্দুতে বক্রের প্রতিক্রিয়া শূন্য হতে পারে।

u^2-র মানের উপর, অর্থাৎ আদি বেগের মানের উপর নির্ভর ক'রে কণাটির গতি নিম্নরূপ হবে :

(i) $u^2<2ag$: এখানে $0<\frac{u^2}{2ag}<1$, কাজেই (54a) থেকে দেখা যায়, কণাটির বেগ শূন্য হবে যে বিন্দুতে, সেখানে $\theta=\alpha$ হলে

$$\cos\alpha=1-\frac{u^2}{2ag}>0.$$

অর্থাৎ

$$0 < \cos\alpha < 1.$$

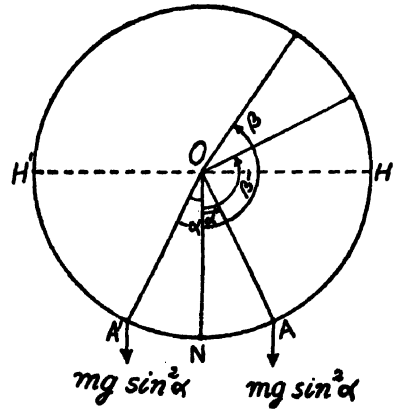
কাজেই α কোণটি একটি সূক্ষ্মকোণ। যেহেতু $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, অতএব α এবং $-\alpha$ উভয় কোণের জন্যই কণাটির বেগ শূন্য হবে। চিত্র 3·12-তে বিন্দুদ্বয় A এবং A′ দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। উপরন্তু, লক্ষ্য করার বিষয় যে যখন $\theta = \pm\alpha$, তখন বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান (53) থেকে আসে

$$R = \frac{m}{a}\left[u^2 + ga\left\{3\left(1 - \frac{u^2}{2ag}\right) - 2\right\}\right]$$

সরল ক'রে আসে

$$R = mg\left(1 - \frac{u^2}{2ag}\right) = mg\cos\alpha > 0. \tag{55}$$

বক্রের প্রতিক্রিয়া ধনাত্মক হওয়ার ফলে বোঝা যায় যে কণাটির সঙ্গে বক্রের সংস্পর্শ রয়েছে। উপরন্তু, $\theta = \alpha$ বিন্দুতে উল্লম্ব দিশায় নিম্নাভিমুখে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বলের মান হ'ল

$mg - R\cos\alpha = mg - mg\cos^2\alpha = mg\sin^2\alpha > 0$, যার ফলে ঐ বিন্দুতে কণাটির ত্বরণ নিম্নাভিমুখী স্পর্শকের দিশায়। সুতরাং $\theta = \alpha$ বিন্দুতে পৌঁছবার পর কণাটি আবার নিচের দিকে নামা শুরু করবে (চিত্র 3·12)। নামতে নামতে N বিন্দুতে কণাটির বেগ হবে $\theta = 0$-র জন্য $v = -u$ অর্থাৎ AN অভিমুখে u পরিমাণ। A′ বিন্দুতে পৌঁছলে, যেখানে $\theta = -\alpha$, কণাটির বেগ আবার শূন্য হয় এবং ঐ বিন্দুতে ত্বরণ নিম্নাভিমুখী স্পর্শকের দিশায়। কাজেই কণাটি A এবং A′ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দোলনগতিতে যাতায়াত করতে থাকে। এই অবস্থায় $R > 0$ ব'লে, কণাটি সর্বদাই বক্রের সংস্পর্শে থাকে।

চিত্র 3·12—বৃত্তাকার বক্রের অভ্যন্তরে বিভিন্ন ক্ষেত্রে কণার গতি

(ii) u^2 $2ag$: এক্ষেত্রে $\cos\alpha=0$ অর্থাৎ $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$. আনুভূমিক ব্যাস $H'H$ হলে, কণাটি H বিন্দু পর্যন্ত পৌঁছায়। ঐ বিন্দুতে বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান (53) থেকে

$$R=3mg\cos\theta\Big]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0.$$

অর্থাৎ H বিন্দুতে কণাটির সঙ্গে বক্রের সংস্পর্শ থাকে না। এই অবস্থা মুহূর্তের জন্য মাত্র—কারণ কণাটির ভরের জন্য mg বল নিম্নাভিমুখে ক্রিয়া করে এবং কণাটি নিচের দিকে নামার চেষ্টা করে ও বক্রের সঙ্গে সংস্পর্শ পুনঃপ্রতিষ্ঠিত হয়। কারণ, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ হলে

$$R=3mg\cos\theta>0.$$

সুতরাং এক্ষেত্রেও H, H' বিন্দুর মধ্যে দোলনগতি স্থাপিত হয়।

(iii) $2ag<u^2\leq 4ag$: এক্ষেত্রে ($54a$) থেকে দেখা যায়, কোন স্থূল কোণ $\theta=\beta$-র জন্য, বেগের মান শূন্য হবে। (55) থেকে দেখা যায় ঐ বিন্দুতে বক্রের প্রতিক্রিয়া ঋণাত্মক, অর্থাৎ কণাটি বক্র ত্যাগ ক'রে গেছে। প্রকৃতপক্ষে, কণাটির তৎপূর্বেই বক্র ত্যাগ করেছে, কারণ ($54b$) অনুযায়ী, যদি $\theta=\beta'$ বিন্দুতে

$$\cos\theta\Big]_{\theta=\beta'}=\frac{2}{3}-\frac{u^2}{3ga}$$

হয়, তবে সেই বিন্দুতে, (52) থেকে দেখা যায়, বেগের মান

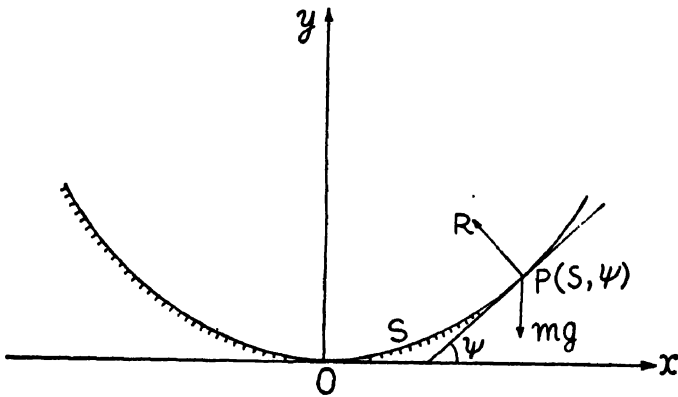
$$v^2=u^2-2ga\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{u^2}{3ga}\right)\right]=\frac{1}{3}(u^2-2ga)>0.$$

অর্থাৎ $\theta=\beta'$ বিন্দুতে বক্র ত্যাগ ক'রে কণাটির মুক্তগতি শুরু হয়েছে।

(iv) যদি $4ag<u^2\leq 5ag$ হয়, তবে বেগের মান কোথাও শূন্য হবে না—কিন্তু $\theta=\beta'$ বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া ঋণাত্মক হওয়ার ফলে কণাটি বক্র ত্যাগ করবে।

(v) $5ag<u^2$: এক্ষেত্রে বেগ এবং বক্রের প্রতিক্রিয়া কোন বিন্দুতেই শূন্য হবে না। কণাটি বৃত্তাকার বক্রটি পুরো ঘুরে আসবে, এবং এইরকম

ঘুরতে থাকবে—কখনও থামবে না, কারণ এক্ষেত্রে বেগের মান কখনও শূন্য হয় না।

3·7. উল্লম্ব সমতলস্থ মসৃণ চক্রজের উপর কণার গতি—উল্লম্ব সমতলে একটি মসৃণ চক্রজের উপর ভিতরের দিকে, অর্থাৎ অবতল ধারে, একটি ভারী কণা রয়েছে। মাধ্যাকর্ষণ-জনিত কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে।

চিত্র 3·13—মসৃণ চক্রজের উপর মাধ্যাকর্ষণ-জনিত কণার গতি

প্রথমেই বলা প্রয়োজন যদি a ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তাকার একটি চাকা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর গড়িয়ে যায়, তাহলে সেই চাকার পরিধিতে অবস্থিত নির্দিষ্ট কোন বিন্দুর সঞ্চারপথের নাম হ'ল **চক্রজ**। অবকলন গণিতের পুস্তকে দেখানো হয়, যে একটি চক্রজের সমীকরণ আন্তস্থ'নাঙ্কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়ঃ

$$s = 4a \sin \psi, \tag{56}$$

যেখানে শীর্ষবিন্দু o থেকে বক্র বরাবর s দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা হয়, এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ox-এর সঙ্গে P বিন্দুতে বক্রের স্পর্শক যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান ψ. এখানে t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি P বিন্দু দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। তাহলে কণাটির আন্তস্থ'নাঙ্ক হ'ল $P(s, \psi)$. oy রেখা শীর্ষবিন্দু দিয়ে উল্লম্ব ঊর্ধ্বদিশা সূচিত করে।

অভিলম্ব দিশায় বক্রের প্রতিক্রিয়া R এবং উল্লম্ব নিম্নাভিমুখী দিশায়

mg—এই দুটি বল কণাটির উপর ক্রিয়া করছে। স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায়, s বৃদ্ধি ও বক্রতাকেন্দ্র অভিমুখে কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\psi, \tag{57a}$$

এবং

$$m\frac{v^2}{\rho}=\mathrm{R}-mg\cos\psi. \tag{57b}$$

(56) থেকে $\sin\psi$-এর মান (57a)-তে বসিয়ে উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{4a}\,s, \tag{58}$$

যা সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ। 2·6 অনুচ্ছেদের ন্যায় সাধারণ সমাধান নিম্নরূপে লেখা যায়—

$$s=\mathrm{A}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t+\varepsilon\right), \tag{59}$$

যেখানে A এবং ε অচর। কণাটি এক্ষেত্রে $2\pi\Big/\sqrt{\frac{g}{4a}}=2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$ পর্যায়কাল-বিশিষ্ট সরল সমঞ্জস গতিতে গমনাগমন করতে থাকে। লক্ষ্য করার বিষয় যে আদি অবস্থায় কণাটি চক্রজের উপর যে বিন্দু থেকেই গতি শুরু করুক না কেন কণাটি $2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$ পর্যায়কাল-বিশিষ্ট সরল সমঞ্জস গতিতে গমন করতে থাকে *। চক্রজের এই ধর্ম ডাচ বিজ্ঞানী হুইগেনস সপ্তদশ শতাব্দীতে একটি দোলক নির্মাণের কাজে ব্যবহার করেন।

চক্রজের প্রতিক্রিয়ার মান (57b) থেকে পাওয়া যায়। এজন্য আমরা দেখি যে

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}=4a\cos\psi.$$

* লক্ষ্য করার বিষয় যে কণাটি যদি আদি অবস্থায় O বিন্দুতে থাকে এবং সেই সময়ে কণাটির কোন বেগ না থাকে তবে গতির সূত্রপাত হবে না।

কাজেই $(57b)$ থেকে,

$$R = m\left(g\cos\psi + \frac{v^2}{4a\cos\psi}\right). \qquad (60)$$

আর v^2-র মান $(57a)$ থেকে সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়, অথবা শক্তি সংরক্ষণ সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়। $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{2}v^2\right)$ ব'লে, $(57a)$-র উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে আসে

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -g\sin\psi = -\frac{g}{4a}s.$$

s সাপেক্ষে সমাকলন করলে আসে

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{g}{4a}\frac{s_0^2}{2} + c_1 \qquad (61a)$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর। যদি আদি অবস্থায় কণাটিকে $s = s_0$ বিন্দু থেকে ছেড়ে দেওয়া হয়, তবে

$$0 = -\frac{g}{4a}\frac{s_0^2}{2} + c_1.$$

$(61a)$ থেকে এই সমীকরণ বিয়োগ ক'রে এবং 2 দ্বারা গুণ ক'রে পাওয়া যায়

$$v^2 = \frac{g}{4a}(s_0^2 - s^2) \qquad (61b)$$

v^2-র এই মান (60)-তে বসিয়ে, বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান আসে

$$R = mg\left(\cos\psi + \frac{s_0^2 - s^2}{16a^2}\right), \qquad (62)$$

যা সর্বদাই ধনাত্মক, কারণ ডানদিকের উভয়পদই ধনাত্মক (কণাটি যখন o বিন্দুর বাঁদিকে আসে তখন ψ একটি ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণ, এবং $\cos\psi$ ধনাত্মক)।

3·8. কণার কৌণিক ভরবেগ। কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ—প্রথম অধ্যায়ে কণার রৈখিক ভরবেগ $\mathbf{p}(=m\mathbf{v})$ সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। ঋজুরেখ গতির আলোচনায় "ভরবেগ" শব্দটি

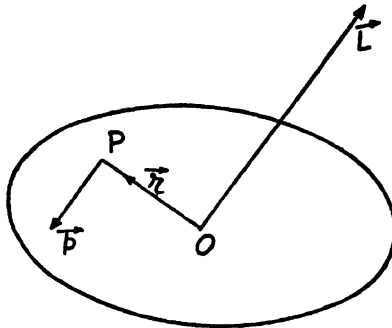
দ্বারা "রৈখিক ভরবেগ" বুঝানো হয়েছে। সমতলীয় গতির আলোচনায় দেখা যায়, কণার আরও এক রকমের ভরবেগ থাকতে পারে, যার নাম **কৌণিক ভরবেগ**।

যেকোন স্থিরবিন্দু O সাপেক্ষে একটি কণা P-র অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{r}$ দ্বারা সূচিত করা হ'ল। কণাটির ভর m, বেগ $\mathbf{v}$ এবং কণাটির উপর ক্রিয়াশীল মোট বল $\mathbf{F}$ ধরা হ'ল। তাহলে কণাটির রৈখিক ভরবেগ $\mathbf{p}$ হ'ল

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}, \tag{63a}$$

এবং O বিন্দু সাপেক্ষে কণাটির কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L}$ এর সংজ্ঞা হ'ল

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\mathbf{r}\times(m\mathbf{v}). \tag{63b}$$

সংজ্ঞা অনুসারে কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L}$ হ'ল O বিন্দু সাপেক্ষে ভরবেগের ভ্রামক। এটি একটি ভেক্টর রাশি। লক্ষ্য করার বিষয়, যে কৌণিক ভরবেগের মান স্থিরবিন্দু O-র উপর নির্ভর করে (চিত্র 3·14)।

চিত্র 3·14—কণার কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$

স্থিরবিন্দু O-র মধ্যদিয়ে গমনকারী কোন অক্ষের দিশায় $\mathbf{L}$-র উপাংশকে অনেক সময় সেই অক্ষ সাপেক্ষে কণাটির কৌণিক ভরবেগ বলা হয়।

স্থিরবিন্দু O সাপেক্ষে ক্রিয়াশীল বল $\mathbf{F}$-এর ভ্রামক বা টর্ক $\mathbf{N}$-এর সংজ্ঞা হ'ল—

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{64}$$

টর্ক ও কৌণিক ভরবেগের সম্বন্ধ নির্ণয়ের জন্য (63b)-র উভয়পক্ষকে সময় সাপেক্ষে অবকলন করা হ'ল (ভর স্থির থাকে ধ'রে নিয়ে)। আমরা দেখি,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times(m\mathbf{v})+\mathbf{r}\times\left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right).$$

কিন্তু, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ এবং গতির দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

কাজেই, $$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (65)$$

কিন্তু (65)-র ডানদিকের প্রথম পদটির মান স্পষ্টতঃ শূন্য। সুতরাং, (64) এবং (65) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (66)$$

অর্থাৎ কৌণিক ভরবেগ পরিবর্তনের হার টর্কের সমান।

যদি $\mathbf{N} = 0$ হয়, তাহলে (66) থেকে দেখা যায়

$$\mathbf{L} = \text{ধ্রুবক ভেক্টর}, \quad (67)$$

অর্থাৎ **বহিঃস্থ টর্ক ক্রিয়া না করলে, কৌণিক ভরবেগের মান অপরিবর্তিত থাকে।** এই ফলকে **কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণের নীতি** বলা হয়। লক্ষ্য করার বিষয় যে ক্রিয়াশীল বল শূন্য না হলেও টর্ক শূন্য হতে পারে।

পরবর্তী অধ্যায়ে কেন্দ্রীয় বল সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে। **কোন কণার উপর ক্রিয়াশীল বল যদি এমন হয় যে বলটি মেরু রেখার দিশায় ক্রিয়া করে (স্থিরবিন্দু অভিমুখে অথবা তদ্বিপরীতে) তবে সেই বলকে কেন্দ্রীয় বল বলে।** কেন্দ্রীয় বলের জন্য কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয়, তা খুব সহজে বোঝা যায়। উপরন্তু গতিটি একটি সমতলে সীমাবদ্ধ থাকে।

ধরা যাক, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি-ভেক্টর $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{r}$. তাহলে, ক্রিয়াশীল বল $\mathbf{F}$ কেন্দ্রীয় বল ব'লে,

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{r}}\, f(r) \quad (68)$$

যেখানে $\hat{\mathbf{r}}$ মেরুরেখা $\mathbf{r}$-এর দিশার একক ভেক্টর সূচিত করে। এক্ষেত্রে বলের টর্ক

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times [-\hat{\mathbf{r}} f(r)] = 0.$$

কাজেই (67) অনুযায়ী কণাটির কৌণিক ভরবেগ

$$\mathbf{L} = \text{ধ্রুবক ভেক্টর।}$$

সুতরাং কৌণিক ভরবেগ $\mathbf{L}$-এর সংজ্ঞা ($63b$), এবং এখান থেকে দেখা যায়, এক্ষেত্রে

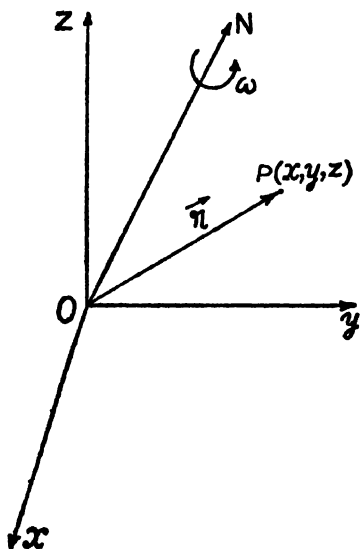
$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{ধ্রুবক ভেক্টর,}$$

অর্থাৎ **কণটির গতি একটি সমতলে সীমাবদ্ধ।** পরবর্তী অধ্যায়ে 4·1 অনুচ্ছেদে এই গুরুত্বপূর্ণ ফলটি একটু অন্যভাবে লাভ করা যাবে।

3·9. ঘূর্ণমান নির্দেশ কাঠামো। অভিকেন্দ্র ও কোরিওলি ত্বরণ—এ পর্যন্ত যে সকল গতি বিষয়ক সমস্যার আলোচনা করা হয়েছে, তার সবগুলিতেই নির্দেশ কাঠামো সময় সাপেক্ষে স্থির ধরা হয়েছে—অর্থাৎ নির্দেশ কাঠামোগুলি জড়ত্বীয়। 1·8 অনুচ্ছেদের আলোচনা থেকে দেখা যায়, প্রকৃতিতে এরূপ কোন নির্দেশ কাঠামোর অস্তিত্ব আমাদের জানা নেই। ভূ-পৃষ্ঠ সাপেক্ষে স্থির নির্দেশ কাঠামোও প্রকৃতপক্ষে ত্বরণশীল। পৃথিবী দিনে একবার আপন অক্ষের চারপাশে ঘুরে আসে। ফলে, ভূ-পৃষ্ঠে স্থির নির্দেশ কাঠামোও ঐ একই কৌণিক বেগে মেরুরেখার চারপাশে ঘুরছে। এই ধরনের সমস্যা আলোচনার উদ্দেশ্যে, বর্তমান অনুচ্ছেদে ঘূর্ণমান নির্দেশ-কাঠামোতে বেগ ও ত্বরণের মান নির্ণয় করা হবে।

চিত্র 3·15—ঘূর্ণমান নির্দেশ কাঠামো

ধরা যাক, সমকোণীয় কার্তেসীয় নির্দেশ-কাঠামো xyz, কোন অক্ষ ON-এর চারপাশে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে (চিত্র 3·15)। কোন কণা P-র অবস্থিতি-ভেক্টর $\mathbf{r}$ হলে

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

যেখানে **i**, **j**, **k** অক্ষত্রয়ের দিশায় একক ভেক্টর সূচিত করে। সময় সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা কণাটির বেগ ভেক্টর **v**-র মান পাওয়া যায়

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\left[\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right]+x\frac{d\mathbf{i}}{dt}+y\frac{d\mathbf{j}}{dt}+z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (69)$$

অক্ষরেখাগুলি স্থির নয় ব'লে একক ভেক্টরগুলিকেও সময় সাপেক্ষে অবকলন করা হয়েছে। ডানদিকের বন্ধনীভুক্ত পদটি ঘূর্ণমান xyz কাঠামো সাপেক্ষে কণাটির বেগ বুঝায়। ডানদিকের অবশিষ্ট পদগুলি অক্ষরেখার ঘূর্ণনের ফলে উদ্ভূত হয়েছে। অক্ষরেখাগুলি ON-অক্ষের চারপাশে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে ব'লে (1.44c) অনুযায়ী

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\omega\times\mathbf{i},\quad \frac{d\mathbf{j}}{dt}=\omega\times\mathbf{j},\ \text{ও}\ \frac{d\mathbf{k}}{dt}=\omega\times\mathbf{k}. \quad (70)$$

(70) থেকে (69)-এ বসিয়ে, এবং ঘূর্ণমান কাঠামো সাপেক্ষে অবকলন বুঝাতে $\left(\frac{d'}{dt}\right)$ প্রতীক ব্যবহার ক'রে আসে

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+x\,\omega\times\mathbf{i}+y\,\omega\times\mathbf{j}+z\,\omega\times\mathbf{k}.$$

সুতরাং, স্থির এবং ঘূর্ণমান কাঠামোতে বেগের সম্বন্ধ হ'ল

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\omega\times(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\omega\times\mathbf{r} \quad (71)$$

এখান থেকে সংকারক সমীকরণ পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dt}=\frac{d'}{dt}+\omega\times \quad (72)$$

এখানে ডানদিকের প্রথম পদটি ঘূর্ণমান নির্দেশ কাঠামোতে সময় সাপেক্ষে অবকলন বুঝায়। (71) সমীকরণের উভয়পক্ষকে সময় সাপেক্ষে অবকলন ক'রে, এবং (72) ব্যবহার ক'রে, জড়ত্বীয় কাঠামো সাপেক্ষে ত্বরণের মান আসে

$$\mathbf{f}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\omega\times\mathbf{r}\right)$$

$$=\frac{d'}{dt}\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\omega\times\mathbf{r}\right)+\omega\times\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\omega\times\mathbf{r}\right)$$

$$\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}+\frac{d'\omega}{dt}\times\mathbf{r}+\omega\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\Big)$$

$$+\omega\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\omega\times(\omega\times\mathbf{r})\cdot$$

সুতরাং জড়ত্বীয় কাঠামো সাপেক্ষে ত্বরণ $\mathbf{f}$-এর মান

$$\mathbf{f}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}+2\omega\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\omega\times(\omega\times\mathbf{r})+\frac{d'\omega}{dt}\times\mathbf{r}. \quad (73)$$

এখানে ডানদিকের প্রথম পদটি ঘূর্ণমান কাঠামো সাপেক্ষে ত্বরণ বুঝায়। দ্বিতীয় পদটিকে **কোরিওলি ত্বরণ** বলে (ফরাসী গাণিতিক কোরিওলির* নামে)। তৃতীয় পদটি আমাদের পূর্ব পরিচিত ; যাকে **অভিকেন্দ্র ত্বরণ** বলে অভিহিত করা হয়। চতুর্থ পদটির আলাদা কোন নাম নেই ; কৌণিক বেগ সুষম হলে চতুর্থ পদটির মান শূন্য হয়। সমুদ্র এবং বায়ুমণ্ডলের গতির আলোচনায় কোরিওলি ত্বরণ গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, ভূ-পৃষ্ঠে বিষুব অঞ্চল এবং মেরু অঞ্চলে উত্তাপের পার্থক্য থাকার ফলে উত্তর-দক্ষিণ দিশায় আনুভূমিক রেখা বরাবর বায়ুমণ্ডলের চাপের পার্থক্য উদ্ভূত হয়। কিন্তু, তৎসত্ত্বেও বায়ুর বেগ প্রধানতঃ পূর্ব-পশ্চিম রেখায় পরিলক্ষিত হয় (শীতের দেশের লোকদের কাছে এই ধরনের পূর্ব-পশ্চিম বায়ু অতিশয় কষ্টকর ব'লে অনুভূত হয় এবং একাধিক বিখ্যাত নাটক ও উপন্যাসে এই বায়ুর বর্ণনা আছে)। কোরিওলি ত্বরণের সাহায্যে এই বায়ুর কারণ বুঝতে পারা যায়।

উদাহরণ 4. একটি হাল্কা l-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সরু রজ্জুর একপ্রান্ত O স্থির রাখা হয়েছে এবং অপর প্রান্ত A-তে একটি ভর বাঁধা আছে। আদি সময়ে A প্রান্তটি O-র ঠিক ঊর্ধ্বে আছে এবং রজ্জুটি টান-টান আছে। আনুভূমিক দিশায় কণাটিকে v_0 বেগে নিক্ষেপ করা হলে, দেখাও যে কণাটি আবার যখন আনুভূমিক দিশায় গমন করবে তখন বেগ V-র মান

$$V^2=v_0^2+4gl,$$

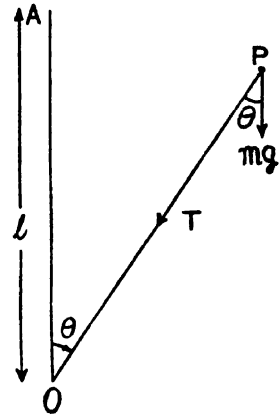
যেখানে প্রদত্ত আছে $v_0^2>gl.$

* G. Coriolis (1831)

ধরা যাক, t-সময়ে A প্রান্তস্থ কণাটির অবস্থিতি P, উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিশার সঙ্গে θ-কোণ করে। রজ্জুটির টান T, $\overrightarrow{PO}$ অভিমুখে ক্রিয়া করে এবং কণাটির ওজন mg উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে ক্রিয়া করে। তাহলে, অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় কণাটির গতীয় সমীকরণ

$$m(-l\dot{\theta}^2) = -mg\cos\theta - T \quad \text{(i)}$$

$$m.\frac{1}{l}\frac{d}{dt}(l^2\dot{\theta}) = mg\sin\theta. \quad \text{(ii)}$$

এখন, $\dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d}{d\theta}(\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2)$ লক্ষ্য ক'রে,

এবং (ii)-র উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{g}{l}\sin\theta.$$

সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{l}\cos\theta + c_1 \quad \text{(iii)}$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর। আদি সময়ে কণাটির বেগ v_0. কাজেই, আদি সময়ে $t=0$, $\theta=0$, এবং $l\dot{\theta}=v_0$. এই মান (iii)-এ বসিয়ে, পাই

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2}{l^2} = -\frac{g}{l} + c_1.$$

এখান থেকে c_1-এর মান (iii)-এ বসিয়ে, সরল ক'রে আসে

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(1-\cos\theta) \quad \text{(iv)}$$

(i) সমীকরণে $\dot{\theta}^2$-র এই মান বসিয়ে সরল ক'রে টান T-র মান দাঁড়ায়

$$T = m\left[\frac{v_0^2}{l} + g(2-3\cos\theta)\right]. \quad \text{(v)}$$

আদি সময়ে, $\theta=0$ লক্ষ্য ক'রে, এবং প্রদত্ত সর্তানুসারে $v_0^2>gl$ হওয়ার জন্য

$$T=m\left[\frac{v_0^2}{l}-g\right]>0.$$

θ-র মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $\cos\theta$-র মান হ্রাস পায় এবং T-র মান ধনাত্মক থাকে। প্রকৃতপক্ষে (v) থেকে দেখা যায়, $T=0$ হওয়ার সর্ত হ'ল

$$\frac{v_0^2}{l}+2g-3g\cos\theta=0$$

অর্থাৎ যেহেতু $v_0^2>lg$,

$$\cos\theta=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{v_0^2}{lg}>1,$$

কাজেই, আলোচ্য কণাটির গতিতে টানের মান কখনই শূন্য হয় না এবং টান সর্বদাই ধনাত্মক। সুতরাং রজ্জুটি সর্বদাই টান-টান থাকে।

কণাটি যখন আনুভূমিক দিশায় আবার গমন করে, তখন $\theta=\pi$. (iv)-র উভয়পক্ষকে l^2 দ্বারা গুণ ক'রে এবং $\theta=\pi$ বসিয়ে, আমরা পাই

$$V^2=l^2\dot{\theta}^2\Big]_{\theta=\pi}=v_0^2+4gl$$

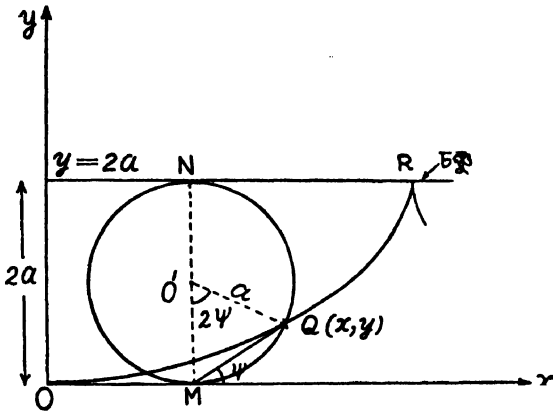
এখানে লক্ষ্য করার বিষয় যে, যদি কণাটির আদি বেগ এমন হয় যে $v_0^2<gl$, তাহলে গতি সুরু হওয়ার পর রজ্জুটি আর টান-টান থাকবে না ($T<0$)। সেক্ষেত্রে, $0\leq\theta\leq\theta_0$ কোণ পর্যন্ত কণাটির গতি ধ্রুবক মাধ্যাকর্ষণ ক্ষেত্রে প্রাসের গতির ন্যায় হবে, এবং তার পরের পর্যায়ে গতি উপরে আলোচিত গতির ন্যায় হবে—যেখানে θ_0 কোণের মান হ'ল

$$\frac{v_0^2}{l}+g(2-3\cos\theta_0)=0$$

সমীকরণের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বীজ।

5. উল্লম্ব সমতলে নিম্নে-শীর্ষবিন্দু-বিশিষ্ট একটি মসৃণ চক্রজের চঞ্চু থেকে একটি কণাকে v_0 বেগে চক্রজ বরাবর নিক্ষেপ করা হ'ল। দেখাতে হবে যে শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত পৌঁছতে সময় লাগবে

$$\left(\frac{4a}{g}\right)^{1/2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4ag}}{v_0}\right)$$

চক্রজের জ্যামিতিক ধর্ম সম্বন্ধীয় আলোচনা অবকলন গণিতের পুস্তকে পাওয়া যায়। বর্তমান সমস্যা আলোচনার সুবিধার্থে, আমরা প্রথমে বিভিন্ন

অক্ষতন্ত্রে চক্রজের সমীকরণ লিপিবদ্ধ করছি। পূর্বে বলা হয়েছে, একটি চক্র যদি একটি স্থির সরল রেখার উপর গড়িয়ে যায়, তবে চক্রটির পরিধিস্থ কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সঞ্চারপথ হ'ল একটি চক্রজ।

ধরা যাক, a ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি চক্র $y=2a$ রেখার উপর গড়িয়ে যাচ্ছে। চক্রটির পরিধিতে Q একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, যা আদি সময়ে মূলবিন্দু O-তে অবস্থিত ছিল। চক্রটির কেন্দ্র O′, এবং N বিন্দু চক্রটির ঘূর্ণনের তাৎক্ষণিক কেন্দ্র। NO′M ব্যাসের সঙ্গে O′Q ব্যাসার্ধ 2ψ কোণ করে। তাহলে, $\angle QMx=\psi$. সুতরাং, Q (x, y) বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$$x=OM+O'Q\sin 2\psi=a.2\psi+a\sin 2\psi=a(2\psi+\sin 2\psi),$$
$$y=O'M-O'Q\cos 2\psi=a-a\cos 2\psi=a(1-\cos 2\psi).$$

আবার, Q বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষরেখার সঙ্গে যে কোণ করে তার মান নির্ণয়ের জন্য, আমরা দেখি যে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\psi}\Big/\frac{dx}{d\psi}=\frac{a.2\sin 2\psi}{a(2+2\cos 2\psi)}=\tan\psi.$$

কাজেই, Q বিন্দুতে চক্রজের স্পর্শক QM, x-অক্ষরেখার সঙ্গে ψ কোণ

করে। আবার, O বিন্দু থেকে চক্রজ বরাবর দূরত্ব s পরিমাপ করা হলে, আমরা জানি

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

সুতরাং, $$\left(\frac{ds}{d\psi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2$$

অর্থাৎ $$\left(\frac{ds}{d\psi}\right)^2 = \{a(2+2\cos 2\psi)\}^2 + (2a\sin 2\psi)^2$$

$$= 16a^2\cos^2\psi.$$

বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আসে,

$$\frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi$$

সুতরাং, সমাকলন ক'রে $s=0$ বিন্দুতে $\psi=0$ ধ'রে পাওয়া যায়

$$s = 4a\sin\psi.$$

এই সমীকরণটি আন্তর্স্থানাঙ্কে চক্রজের সমীকরণ রূপায়িত করে। চক্রজটি যেখানে $y=2a$ রেখাকে ছেদ করে (চিত্রে R বিন্দু), সেই বিন্দুতে $\psi = \frac{\pi}{2}$, এবং $s=4a$. লক্ষণীয় যে, R বিন্দুতে চক্রজের পরবর্তী শাখা শুরু হয় এবং ঐ বিন্দুতে শাখাদ্বয়ের স্পর্শক অভিন্ন। এরূপ বিন্দুকে কাস্প বা চঞ্চু বলা হয়।

এবার বর্তমান সমস্যায় আসা যাক। আলোচ্য কণাটির গতীয় সমীকরণ ও তার সমাধান 3.7 অনুচ্ছেদের (57a), (57b) ও (59) সমীকরণে প্রদত্ত হয়েছে। t-সময়ে শীর্ষবিন্দু থেকে চক্রজ বরাবর কণাটির দূরত্ব s হ'ল

$$s = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t + \varepsilon\right), \tag{i}$$

যেখানে A ও ε দুটি অচর। প্রদত্ত সর্তানুসারে, আদি সময়ে

$$t=0,\ s=4a,\ \frac{ds}{dt}=v_0.$$

কাজেই,

$$4a = \text{A} \cos \varepsilon \tag{ii}$$

এবং

$$v_0 = -\text{A}\sqrt{\frac{g}{4a}}\sin \varepsilon. \tag{iii}$$

(ii) ও (iii) থেকে A অপনয়ন ক'রে পাওয়া যায়

$$\tan \varepsilon = -\frac{v_0}{\sqrt{4ag}},$$

অর্থাৎ

$$\varepsilon = -\tan^{-1}\frac{v_0}{\sqrt{4ag}} \tag{iv}$$

শীর্ষবিন্দুতে $s=0$. কাজেই শীর্ষবিন্দুতে পৌঁছানোর জন্য প্রয়োজনীয় সময়

$$\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

অতএব

$$t = \sqrt{\frac{4a}{g}}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \sqrt{\frac{4a}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{v_0}{\sqrt{4ag}}\right].$$

কিন্তু

$$\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{v_0}{\sqrt{4ag}} = \cot^{-1}\frac{v_0}{\sqrt{4ag}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{4ag}}{v_0}.$$

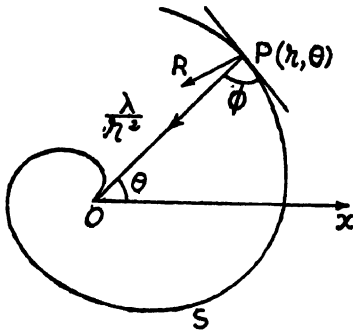
সুতরাং নির্ণেয় সময় হ'ল

$$t = \left(\frac{4a}{g}\right)^{1/2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4ag}}{v_0}\right).$$

6. সুষমকোণী সর্পিল $r = ae^{\theta \cot \alpha}$-র আকৃতি-বিশিষ্ট একটি মসৃণ সরু তারের মধ্যে দিয়ে একটি পুঁতি গমন করছে। প্রতি একক ভরের জন্য মূলবিন্দু থেকে r দূরত্বে পুঁতিটির উপর $\frac{\lambda}{r^2}$ পরিমাণ আকর্ষক বল ক্রিয়া করছে।

আদি সময়ে পুঁতিটি মূলবিন্দু থেকে c দূরত্বে স্থির অবস্থায় ছিল। দেখাতে হবে, যে মূলবিন্দু পর্যন্ত পৌঁছাতে প্রয়োজনীয় সময় হ'ল

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{c^3}{2\lambda}}\sec\alpha.$$

উপরন্তু t-সময়ে বক্রের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, t-সময়ে পুঁতিটির অবস্থিতি বিন্দু P-র ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক (r, θ) এবং মূলবিন্দু O থেকে বক্র বরাবর দূরত্ব s, বক্রের প্রতিক্রিয়া R, এবং P বিন্দুতে স্পর্শকের সঙ্গে অর OP, φ কোণ করে। তাহলে স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় পুঁতিটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-m\frac{\lambda}{r^2}\cos\varphi \tag{i}$$

এবং

$$m\frac{v^2}{\rho}=\mathrm{R}-m\frac{\lambda}{r^2}\sin\varphi, \tag{ii}$$

যেখানে ρ বক্রটির বক্রতা-ব্যাসার্ধ। অবকলন গণিতের পুস্তকে দেখানো হয়

$$\cos\varphi=\frac{dr}{ds} \text{ এবং } \sin\varphi=r\frac{d\theta}{ds}, \tag{iii}$$

এবং পাদস্থানাঙ্কে বক্রতা-ব্যাসার্ধ

$$\rho=r\frac{dr}{dp}. \tag{iv}$$

(i)-র উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, (iii) থেকে $\cos\varphi$-র মান ব্যবহার ক'রে এবং $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$ লিখে আমরা পাই

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right)=-\frac{\lambda}{r^2}\frac{dr}{ds}.$$

উভয়পক্ষের সমাকলন ক'রে আসে

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{\lambda}{r}+c_1 \qquad \text{(v)}$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর সূচিত করে। আদি সময়ে, কণাটি মূলবিন্দু থেকে c দূরত্বে স্থির অবস্থায় ছিল। কাজেই,

$$t=0,\ r=c,\ v=0.$$

(v)-এ এই মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$0=\frac{\lambda}{c}+c_1,\ \text{অর্থাৎ}\ c_1=-\frac{\lambda}{c}.$$

c_1-র এই মান (v)-এ বসিয়ে সরল ক'রে ও উভয়পক্ষের বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{ds}{dt}=v=-\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}\sqrt{\frac{c-r}{r}}. \qquad \text{(vi)}$$

পুঁতিটি আকর্ষক বলের ক্রিয়ায় মূলবিন্দু অভিমুখে আসছে ব'লে, এখানে ঋণাত্মক বর্গমূলটি গ্রহণ করা হয়েছে। সময় নির্ণয়ের জন্য (vi)-র সমাকলন করা প্রয়োজন। এই উদ্দেশ্যে $\frac{ds}{dt}$-কে $\frac{dr}{dt}$-র রূপে প্রকাশ করলে সুবিধা হয়। সুষমকোণী সর্পিলটির উভয়পক্ষের লগারিদমীয় অবকলন করলে আসে

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=\cot\alpha.$$

সুতরাং $\cot\varphi=\cot\alpha$, অর্থাৎ $\varphi=\alpha$. উপরন্তু

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2=1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2=1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha.$$

কাজেই $ds=dr\sec\alpha$.

এই মান (vi)-এ বসিয়ে, $t=0$ থেকে t পর্যন্ত সমাকলন ক'রে মূলবিন্দু $r=0$-তে পৌঁছনোর সময় পাওয়া যায়

$$\int_{t=0}^{t}\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}\cos\alpha\,dt=-\int_{r=c}^{0}\sqrt{\frac{r}{c-r}}\,dr$$

অতএব,

$$\sqrt{\frac{2\lambda}{c}}\cos\alpha . t=\int_{r=0}^{c}\sqrt{\frac{r}{c-r}}\,dr. \qquad \text{(vii)}$$

ডানদিকের সমাকলনটির মান $\sqrt{r}=\sqrt{c}\ \sin\beta$ প্রতিস্থাপন ক'রে সহজেই পাওয়া যায়। আমরা দেখি

$$\int_{r=0}^{c}\sqrt{\frac{r}{c-r}}dr=\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sqrt{c}\sin\beta}{\sqrt{c}\cos\beta}\cdot 2c\sin\beta\cos\beta d\beta$$

$$=c\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2\beta)\,d\beta=\frac{\pi}{2}c.$$

(vii)-এ এই মান বসিয়ে নির্ণেয় সময়ের মান দাঁড়ায়

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{c^3}{2\lambda}}\sec\alpha.$$

(ii) থেকে বক্রের প্রতিক্রিয়া R-র মান আসে

$$\text{R}=m\left[\frac{v^2}{\rho}+\frac{\lambda}{r^2}\ \sin\varphi\right] \qquad \text{(viii)}$$

কিন্তু সুষমকোণী সাঁপলের পাদ সমীকরণ হ'ল

$$r=p\ \text{cosec}\ \alpha.$$

কাজেই বক্রতা-ব্যাসার্ধ $\rho=r\dfrac{dr}{dp}=r\ \text{cosec}\ \alpha$. এই মান এবং (vi) থেকে v^2-র মান (viii)-এ বসিয়ে এবং $\varphi=\alpha$ বসিয়ে সরল ক'রে, বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান আসে

$$\text{R}=\frac{m\lambda}{r^2}\sin\alpha\left(3-\frac{2r}{c}\right).$$

প্রশ্নমালা 3(খ)

1. একটি কণা এমনভাবে একটি বক্রপথে গমন করছে যে কণাটির ত্বরণের পরিমাণ ধ্রুবক ও দিশা সর্বদা বক্রটির স্পর্শকের সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট কোণ করে। দেখাও যে কণাটির গতিপথ একটি সুষমকোণী সাঁপল।

2. উল্লম্ব সমতলস্থ মসৃণ বৃত্তের সর্বোচ্চ বিন্দুতে একটি ভারী কণা স্থির অবস্থায় আছে। কণাটিকে সামান্য পরিমাণ স্থানচ্যুত করলে, দেখাও যে কণাটি যে বিন্দুতে বৃত্তটি পরিত্যাগ করবে, শীর্ষবিন্দু থেকে সেই বিন্দুটির উল্লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের এক তৃতীয়াংশ পরিমাণ।

3. উল্লম্ব সমতলস্থ মসৃণ বৃত্তের ভিতরের ধারে, একটি কণাকে সর্বনিম্ন বিন্দুতে u বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a এবং $2u^2 = 7ag$ হলে দেখাও যে কণাটি সংযোগকারী ব্যাসার্ধ যেখানে উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিশার সঙ্গে $\frac{\pi}{3}$ কোণ করে, সেখানে কণাটি বৃত্ত পরিত্যাগ করবে।

4. একটি সরু হাল্কা, a দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট, সম্প্রসারণ-রহিত রজ্জুর একপ্রান্তে একটি ভারী কণা বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্ত O স্থির। O বিন্দুর ঠিক নিচে কণাটি ঝুলতে থাকা কালে কণাটিকে v_0 বেগে আনুভূমিক দিশায় নিক্ষেপ করা হ'ল। দেখাও যে $v_0^2 > 5ga$ হলে, কণাটি একটি সম্পূর্ণ বৃত্ত রচনা করবে।

5. উল্লম্ব সমতলে নিম্নস্থ শীর্ষবিন্দু-বিশিষ্ট একটি মসৃণ অধিবৃত্তে, m ভরের একটি কণা সরল দোলনগতি নিষ্পন্ন করছে। নাভিলম্বের দুই প্রান্তে কণাটি যদি স্থির অবস্থায় আসে, তবে নিম্নতম বিন্দু দিয়ে গমন করার সময় বক্রের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

6. উল্লম্ব সমতলে ঊর্ধ্বদিকে শীর্ষবিন্দু-বিশিষ্ট একটি মসৃণ অধিবৃত্তের উপর একটি কণা গড়িয়ে যাচ্ছে। শীর্ষবিন্দুতে কণাটির বেগ v_0 এবং কণাটির ভর m হলে দেখাও যে বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান হ'ল

$$\frac{m}{\rho}(v_0^2 - 4ga),$$

যেখানে অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব $4a$ এবং বক্রতা-ব্যাসার্ধ ρ.

7. উল্লম্ব সমতলে নিম্নস্থ শীর্ষবিন্দু-বিশিষ্ট একটি মসৃণ চক্রজ বেয়ে একটি কণা নিচে গড়িয়ে পড়ছে। দেখাও যে সম্পূর্ণ উল্লম্ব উচ্চতার প্রথমার্ধ অতিক্রম করতে যে সময় লাগে, দ্বিতীয়ার্ধ অতিক্রম করতেও সেই একই সময় লাগে।

8. একটি স্থির উল্লম্ব বৃত্তাকার মসৃণ তারের মধ্যে দিয়ে একটি পুঁতি গড়িয়ে যাচ্ছে। আদি অবস্থায় পুঁতিটিকে সর্বোচ্চ বিন্দুতে v_0 বেগে নিক্ষেপ

করা হয়েছে। পুঁতিটির অবস্থিতি বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিশার সঙ্গে যখন θ-কোণ করবে, দেখাও যে তখন বক্রের প্রতিক্রিয়া হ'ল

$$mg(3\cos\theta - 2) - m\frac{v_0^2}{a},$$

যেখানে পুঁতির ভর m ও বৃত্তের ব্যাসার্ধ a.

9. একটি স্থির মসৃণ উল্লম্ব বৃত্তাকার তারের মধ্যে দিয়ে একটা ভারি পুঁতি গড়িয়ে যাচ্ছে। পুঁতিটিকে বৃত্তের নিম্নতম বিন্দু থেকে এমন বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল, যা পুঁতিটিকে বৃত্তের ঊর্ধ্বতম বিন্দু পর্যন্ত পৌঁছে দেবার পক্ষে যথেষ্ট হবে। দেখাও যে পুঁতিটির অবস্থিতি বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিশার সঙ্গে θ-কোণ করলে

$$2\tan\frac{\theta}{2} = e^{\sqrt{\frac{g}{a}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}t},$$

যেখানে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a.

10. উল্লম্ব দিশায় অক্ষ ও ঊর্ধ্বমুখী শীর্ষবিন্দু-বিশিষ্ট একটি মসৃণ চক্রজের শীর্ষবিন্দুর খুব নিকটে একটি কণাকে ছেড়ে দেওয়া হ'ল, যাতে কণাটি চক্রজের গা বেয়ে গড়িয়ে পড়ে। দেখাও যে, আনুভূমিক দিশার সঙ্গে $\frac{\pi}{4}$ কোণ ক'রে গমন করার সময়ে কণাটি চক্রজটিকে পরিত্যাগ করে।

11. উল্লম্ব সমতলে অধিবৃত্তাকার মসৃণ একটি টিউব আছে যার শীর্ষবিন্দু নিম্নস্থ। ধ্রুবক মাধ্যাকর্ষণের ফলে একটি কণা স্থির অবস্থা থেকে টিউবের ভিতর দিয়ে গড়িয়ে পড়ছে। দেখাও যে, কোন অবস্থিতিতে বক্রের প্রতিক্রিয়ার মান হ'ল

$$\frac{2w}{\rho}(d+a),$$

যেখানে অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব $4a$, বক্রতা-ব্যাসার্ধ ρ এবং আদি সময়ে শীর্ষবিন্দু থেকে কণাটির উচ্চতা d এবং w কণাটির ওজন সূচিত করে।

12. m ভর-বিশিষ্ট একটি কণা উল্লম্ব সমতলে a ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি স্থির মসৃণ বৃত্তাকার টিউবের ভিতরে গড়িয়ে যাচ্ছে। টিউবটির নিম্নতম বিন্দু

N থেকে কণাটিকে u বেগে নিক্ষেপ করা হলে, কণাটি M বিন্দু পর্যন্ত পৌঁছায়। শক্তি সংরক্ষণ নীতির প্রয়োগে দেখাও যে

$$\frac{u}{NM} = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

উপরন্তু দেখাও, যে N বিন্দু থেকে y উচ্চতায় কণাটির বেগ v হলে, টিউবের প্রতিক্রিয়ার মান হ'ল

$$m\left[\frac{v^2}{a} + g\left(1 - \frac{3y}{a}\right)\right],$$

যেখানে $\qquad v^2 = u^2 - 2gy.$

13. ধ্রুবক মাধ্যাকর্ষণের ফলে একটি কণা উল্লম্ব সমতলস্থ একটি মসৃণ বক্রের উপর গড়িয়ে যাচ্ছে। যদি কণাটির বেগ, সর্বোচ্চ বিন্দু থেকে বক্র বরাবর দূরত্বের সমানুপাতিক হয়, তবে দেখাও যে বক্রটি একটি চক্রজ।

*14. বৃত্তাকার একটি মসৃণ সরু তারের মধ্যে দিয়ে একটি পুঁতি গমন করছে। প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r দূরত্বে পুঁতিটির উপর $\frac{\lambda}{r^2}$ পরিমাণ আকর্ষক বল ক্রিয়া করছে। বলকেন্দ্রটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে c-দূরত্বে, বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত। দেখাও যে, সম্পূর্ণ বৃত্তটি ঘুরে আসতে হলে, বলকেন্দ্রের নিকটতম বিন্দুতে পুঁতিটির বেগ

$$\left(\frac{4\lambda c}{a^2 - c^2}\right)^{1/2}$$

-এর চেয়ে কম হলে চলবে না।

15. একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য l. দোলকটি উল্লম্ব সমতলে সম্পূর্ণ বৃত্ত রচনা করছে এবং এর বেগের ক্ষুদ্রতম মান $\sqrt{2gl}$-এর তুলনায় বৃহৎ। দেখাও যে নিম্নতম বিন্দু থেকে θ-কোণ রচনা করার জন্য প্রয়োজনীয় সময়, আসন্নভাবে

$$t = \frac{1}{\omega}\left[\theta - \frac{g}{\omega^2 l}\sin\theta\right],$$

যেখানে, রজ্জুটি আনুভূমিক থাকা কালে কৌণিক বেগ ω.

*16. একটি মসৃণ বৃত্তাকার সরু টিউবে একটি কণা গমন করছে। প্রতি একক ভরের জন্য, বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষক

বল λr. বৃত্তাকার টিউবটির ব্যাসার্ধ a এবং বলকেন্দ্র বৃত্তের অভ্যন্তরে কেন্দ্র থেকে b-দূরত্বে অবস্থিত। আদি সময়ে কণাটিকে যদি বলকেন্দ্র থেকে প্রায় দূরতম বিন্দুতে ছেড়ে দেওয়া হয়, তবে দেখাও যে বলকেন্দ্রের নিকটতম বিন্দু পর্যন্ত আসতে সময় লাগবে

$$\sqrt{\frac{a}{\lambda b}}\log(\sqrt{2}+1).$$

*17. উল্লম্ব সমতলে আনুভূমিক দিশায় উপাক্ষ-বিশিষ্ট একটি মসৃণ উপবৃত্তাকার বক্রে একটি ভারী কণা গড়িয়ে যাচ্ছে। প্রায় ঊর্ধ্বতম বিন্দুতে কণাটিকে আদি সময়ে ছেড়ে দেওয়া হয়। দেখাও যে, কণাটি যে বিন্দুতে উপবৃত্তটি পরিত্যাগ করবে, সেই বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ ϕ-এর মান নির্ণয়ের সমীকরণ হ'ল

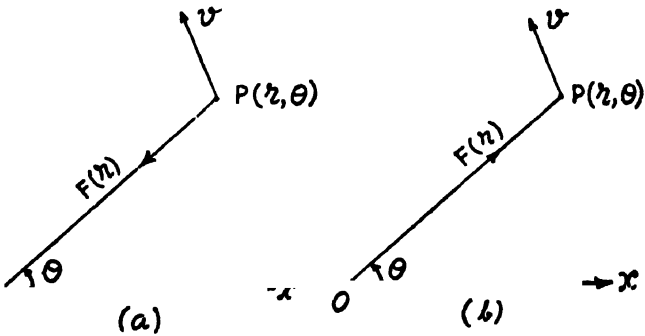
$$e^2 \cos^3\phi = 3\cos\phi - 2,$$

যেখানে e উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা সূচিত করে।

চতুর্থ অধ্যায়

কেন্দ্রীয় বল ও কেন্দ্রীয় কক্ষপথ

4·1. কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতি—পূর্বের অধ্যায়ে সমতলীয় গতির সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে এবং বিভিন্ন ধরনের মুক্ত ও সবাধ গতির সমস্যা আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান অধ্যায়ে একটি বিশেষ ধরনের ক্রিয়াশীল বলের জন্য কণার গতি আলোচনা করা হবে। এখানে ধরা হবে, ক্রিয়াশীল বল একটি **কেন্দ্রীয় বল**—অর্থাৎ ক্রিয়াশীল বল **কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে কণাটির দূরত্বের ফাংশন এবং বলটি অরের দিশায় ক্রিয়া করে।** ক্রিয়াশীল বলের অভিমুখ স্থির বিন্দুটির দিকে হতে পারে বা তদ্বিপরীতও হতে পারে (চিত্র 4·1)*। প্রয়োগের দিক থেকে কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

পূর্বের অধ্যায়ে, 3·8. অনুচ্ছেদে দেখানো হয়েছে, **কেন্দ্রীয় বলাধীন গতিতে কণার কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয়।** কেন্দ্রীয় বলাধীন

চিত্র 4·1

কেন্দ্রীয় বলাধীন গতি। (*a*) নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে, অর্থাৎ $\overline{PO}$ অভিমুখে বল, এবং (*b*) তদ্বিপরীতে অর্থাৎ $\overrightarrow{OP}$ অভিমুখে বল।

---

* কোন কোন পুস্তকে কেন্দ্রীয় বলের একটু অন্যরকম সংজ্ঞা দেওয়া হয়, এবং বলা হয়, ক্রিয়াশীল বল নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে ক্রিয়া করে (তদ্বিপরীতে নয়)। গাণিতিক পদার্থবিদ্যার বেশির ভাগ পুস্তকেই কিন্তু উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞা ব্যবহৃত হয়।

কণার গতি একটি সমতলে সীমাবদ্ধ থাকে অর্থাৎ **কেন্দ্রীয় বলাধীন গতি হ'ল সমতলীয় গতি,** তা আমরা প্রথমে প্রমাণ করব।

স্থিরবিন্দু O-কে মূলবিন্দু ধ'রে t-সময়ে কণা P-র বেগ $\mathbf{v}$ ধরা হ'ল। P বিন্দুর অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{r}$ এবং ঐ দিশায় ক্রিয়াশীল বল $\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{r}}\,\mathrm{F}(r)$ দ্বারা সূচিত করা হ'ল যেখানে $\mathbf{r}$-র দিশায় একক ভেক্টর হ'ল $\hat{\mathbf{r}}$। যদি বলটি PO অভিমুখে ক্রিয়া করে, তবে $\mathrm{F}(r)$ ধণাত্মক হবে ; আর OP অভিমুখে ক্রিয়া করলে $\mathrm{F}(r)$-এর মান ঋণাত্মক হবে। $\mathbf{F}$ এবং $\mathbf{v}$ দ্বারা নির্ণীত সমতলের যে কোন লম্ব দিশায় একক ভেক্টর $\mathbf{n}$ ধরা হ'ল। কণাটির ভর m ধ্রুবক ধ'রে, কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(r). \tag{1}$$

কিন্তু পরস্পর লম্ব দিশা ব'লে, স্কেলার গুণফল

$$(\mathbf{n}.\,\mathbf{F}) = 0.$$

$$(1) \text{ অনুসারে } \left(\mathbf{n}.\,m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = 0,$$

অর্থাৎ $\mathbf{n}$-এর দিশায় ত্বরণের উপাংশের মান শূন্য। আবার $\mathbf{n}$-এর দিশায় বেগের উপাংশও শূন্য, কারণ

$$(\mathbf{n}.\,\mathbf{v}) = 0.$$

সুতরাং, $\mathbf{F}$ ও $\mathbf{v}$-র দ্বারা নির্ণীত সমতলের লম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণের কোন উপাংশ নেই। ফলতঃ, কণাটির গতি $\mathbf{F}$ ও $\mathbf{v}$-র দ্বারা নির্ণীত সমতলে সীমাবদ্ধ, অর্থাৎ **গতিটি হ'ল সমতলীয় গতি। কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতিপথকে কেন্দ্রীয় কক্ষপথ বলা হয়।**

মূলবিন্দু O সাপেক্ষে t-সময়ে কণা P-র ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক (r, θ) দ্বারা নির্দেশ করা হলে, অনুপ্রস্থ দিশায় ক্রিয়াশীল বলের কোন উপাংশ নেই লক্ষ্য ক'রে, (3·3) অনুযায়ী অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় কণাটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\mathrm{F}(r), \tag{2a}$$

এবং

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \tag{2b}$$

সময় সাপেক্ষে $(2b)$-র সমাকলন ক'রে আসে

$$r^2\dot{\theta} = \text{ধ্রুবক} = h \text{ (ধরা যাক)।} \tag{3}$$

এখান থেকেও দেখা যায়, কণার কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। কারণ, অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় কণাটির বেগের উপাংশ হ'ল যথাক্রমে $\dot{r}$ এবং $r\dot{\theta}$. কাজেই সমতলটির উপর O বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব-অক্ষের চারপাশে কণাটির কৌণিক ভরবেগের পরিমাণ হ'ল

$$|\mathbf{L}| = r \times (mr\dot{\theta})$$
$$= mr^2\dot{\theta} \tag{4}$$

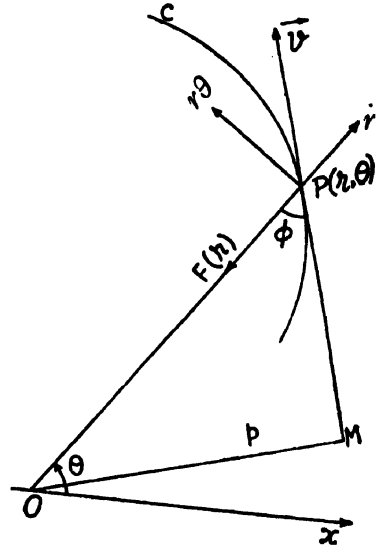
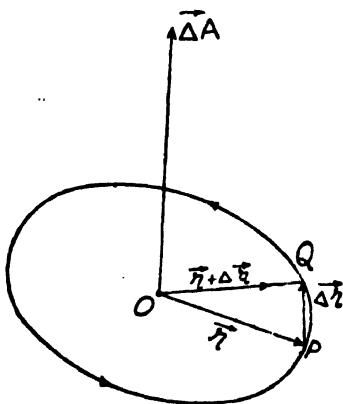
সুতরাং (3) ও (4) থেকে দেখা যাচ্ছে কণাটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হচ্ছে। h-কে অনেক সময় **কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক** বলা হয়।

চিত্র 4·2
কৌণিক ভরবেগ। পাদ সমীকরণ

আবার P বিন্দুতে কণাটির গতিপথের (চিত্রে বক্র C) স্পর্শকের উপর মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্ব-দূরত্ব $OM = p$ এবং $\angle OPM = \phi$ হলে, $p = r \sin\phi$. বেগের অনুপ্রস্থ উপাংশ হ'ল

$$r\dot{\theta} = v \sin\phi = \frac{vp}{r}.$$

$$\text{সুতরাং,} \quad vp = r^2\dot{\theta} = h. \tag{5}$$

ক্ষেত্র অতিক্রমের হার—**সময়ের সঙ্গে অর OP যে হারে ক্ষেত্র অতিক্রম করছে তা একটি ধ্রুবক এবং তার মান হ'ল h-র অর্ধেকের সমান।** চিত্র 4·3 থেকে সহজেই তা বোঝা যায়।

ধরা যাক, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{r}$ এবং অমিতক্ষুদ্র সময় Δt পরে কণাটির অবস্থিতি Q ভেক্টর $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ দ্বারা নির্দেশ করা হ'ল। তাহলে

চিত্র 4·3
কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবকের ব্যাখ্যা

$$\overrightarrow{PQ}=\Delta\mathbf{r},$$

Δt সময়াভ্যন্তরে অর OP যে ক্ষেত্র অতিক্রম করে, প্রথম ক্রম পর্যন্ত তার মান হ'ল ত্রিভুজ QOP-র সমান (এখানে চাপ PQ-র স্থলে আসন্নভাবে জ্যা PQ গ্রহণ করা হয়েছে)। ভেক্টর বীজ-গণিতের সূত্র অনুযায়ী এই ত্রিভুজের ভেক্টর ক্ষেত্রফল $\Delta\mathbf{A}$-র মান* হ'ল

$$\Delta\mathbf{A}=\tfrac{1}{2}\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{r}$$

সুতরাং, উভয়পক্ষকে Δt দ্বারা ভাগ ক'রে $\Delta t\to 0$ সীমায় আমরা পাই

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\tfrac{1}{2}\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\tfrac{1}{2}\ \mathbf{r}\times\mathbf{v}=\frac{1}{2m}\ \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$$

$$=\frac{1}{2m}\mathbf{L}, \qquad (6a)$$

যেখানে $\mathbf{L}$ কণাটির কৌণিক বেগ ভেক্টর রূপায়িত করে। সুতরাং ক্ষেত্রফল রচনার হারের পরিমাণ হ'ল

$$\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|=\frac{1}{2m}\,|\mathbf{L}|=h/2. \qquad (6b)$$

কেন্দ্রীয় কক্ষপথে P বিন্দু যদি এমন হয় যে, অর OP ঐ বিন্দুতে কক্ষপথের অভিলম্ব হবে, তবে অর OP-কে **অপদূরক রেখা** বলা হয়। দুটি

* দুটি ভেক্টর $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$-র ভেক্টর গুণফল ভেক্টর-দ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধ'রে যে সামান্তরিক পাওয়া যায় তার ক্ষেত্রফলের সমান। এই ক্ষেত্রফল একটি ভেক্টর রাশি, যার দিশা হ'ল $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ ভেক্টরের দিশা। আর ঐ ভেক্টর-দ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধ'রে যে ত্রিভুজ পাওয়া যায় তার ক্ষেত্রফল হ'ল ঐ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক অর্থাৎ $\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$-র সমান।

আনুক্রমিক অপদূরক রেখার অন্তর্বর্তী কোণের নাম হ'ল **অপদূরক কোণ**। কক্ষপথে মূলবিন্দুর নিকটতম বিন্দুকে **অনুসূর** এবং দূরতম (সসীম হলে) বিন্দুকে **অপসূর** বলা হয়।

কেন্দ্রীয় কক্ষপথের গতীয় সমীকরণ (2a) এবং (2b) সমাধান করার জন্য, (3) থেকে $\dot{\theta}$-র মান (2a) বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}=-\mathrm{F}(r).$$

বেশিরভাগ ক্ষেত্রেই এই অবকল সমীকরণটি সমাধান করা কঠিন। অর r-এর পরিবর্তে ব্যস্তরাশি $u=\dfrac{1}{r}$ প্রতিস্থাপন ক'রে, উপরোক্ত সমীকরণ অনেকটা সরল করা যায়—পরবর্তী অনুচ্ছেদে তা দেখানো হচ্ছে।

4.2. অরের ব্যস্তরাশি প্রতিস্থাপন ও কেন্দ্রীয় কক্ষপথের অবকল সমীকরণ—

ধরা যাক,

$$u=\frac{1}{r} \tag{7}$$

তাহলে, অবকলনের শৃঙ্খল-নিয়ম অনুযায়ী

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} \tag{8a}$$

(3) থেকে $\dot{\theta}$-র মান আসে

$$\dot{\theta}=hu^2. \tag{8b}$$

$\dot{\theta}$-র এই মান (8a)-তে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}hu^2=-h\frac{du}{d\theta}.$$

সময় সাপেক্ষে পুনরায় অবকলন করলে আসে

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)=-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\dot{\theta}$$

এখানে $(8b)$ থেকে $\dot{\theta}$-র মান বসিয়ে আসে

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{8c}$$

$(8b)$ এবং $(8c)$ থেকে $\dot{\theta}$ এবং $\frac{d^2r}{dt^2}$-র মান $(2a)$-তে বসিয়ে, সরল করলে দাঁড়ায়

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=+\frac{P}{h^2u^2}, \tag{9}$$

যেখানে $P\equiv F(r)/m$, প্রতি একক ভরের জন্য বলের পরিমাণ সূচিত করে। লক্ষ্য করা দরকার, যে অর $\mathbf{r}$-র দিশায় ক্রিয়াশীল বল $-F(r)$ ধরা হয়েছে। যদি বলটি মূলবিন্দু O অভিমুখে ক্রিয়া করে, অর্থাৎ, $-\mathbf{r}$ অভিমুখে ক্রিয়া করে তবে $F(r)$ ধনাত্মক হবে অর্থাৎ P ধনাত্মক হবে, অন্যথায় P-র মান ঋণাত্মক হবে। $(8b)$ ও (9) কণাটির কক্ষপথের অবকল সমীকরণ।

(9) সমীকরণটি একটি দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সমীকরণ। r বা u-র ফাংশন-রূপে P-র মান প্রদত্ত হলে, আদি দশার সাহায্যে সুপরিচিত পদ্ধতি অনুযায়ী (9) সমীকরণকে সমাধান করা যায়। অন্যদিকে, যদি কেন্দ্রীয় কক্ষপথের সমীকরণ প্রদত্ত থাকে, তবে সেই সমীকরণকে দুবার θ-স্যাপেক্ষে অবকলন ক'রে এবং (9) ব্যবহার ক'রে, ক্রিয়াশীল বলের মান নির্ণয় করা যায়। নিম্নে আলোচিত উদাহরণে তা দেখানো হয়েছে।

উদাহরণ: 1. কেন্দ্রীয় বলাধীন কোন কণার কক্ষপথ একটি কেন্দ্রীয় কণিক। বলকেন্দ্র নাভিবিন্দু অভিমুখে হলে **বলের নিয়ম নির্ণয়** করতে হবে।

কক্ষপথ কেন্দ্রীয় কণিক হওয়ার জন্য, মেরুস্থানাঙ্কে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ হ'ল

$$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta,$$

যেখানে নাভিবিন্দুকে মূলবিন্দু এবং অর্ধ-নাভিলম্ব l ও উৎকেন্দ্রতা e ধরা হয়েছে। $u=1/r$, প্রতিস্থাপন ক'রে, সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়—

$$u=\frac{1}{l}+\frac{e}{l}\cos\theta.$$

θ সাপেক্ষে অবকলন ক'রে আসে,

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{l}\sin\theta,\quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{l}\cos\theta.$$

অতএব,

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{l} + \frac{e}{l}\cos\theta - \frac{e}{l}\cos\theta = \frac{1}{l}$$

(9) সমীকরণে এই মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{P}{h^2u^2} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{l}$$

অর্থাৎ,

$$P = \frac{h^2}{l}u^2 = \frac{h^2}{l}\frac{1}{r^2}.$$

$\frac{h^2}{l}$ ধ্রুবক ব'লে, এখান থেকে দেখা যায়, প্রতি একক ভরের জন্য বলের পরিমাণ

$$P \propto \frac{1}{r^2},$$

অর্থাৎ বলের নিয়ম হ'ল **ব্যস্ত বর্গীয়**। গ্রহের গতি, এবং বোরের তত্ত্ব[1] অনুযায়ী পরমাণু গঠনকারী ইলেকট্রনের গতি আলোচনায় ব্যস্ত বর্গীয় বল বিশেষ গুরুত্বপর্ণ স্থান অধিকার করে। পরবর্তী অধ্যায়ে ব্যস্ত বর্গীয় কেন্দ্রীয় বলের জন্য কণার গতি আলোচনা করা হবে।

4.3. কেন্দ্রীয় কক্ষপথের পাদ সমীকরণ—কেন্দ্রীয় কক্ষপথের অবকল সমীকরণ পূর্বের অনুচ্ছেদে প্রদত্ত হয়েছে। পাদ-স্থানাঙ্ক ব্যবহার করলে কেন্দ্রীয় কক্ষপথের জন্য একটি প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ লাভ করা যায়—যার সমাধান অনেকক্ষেত্রে খুব সুবিধাজনক হয়।

ধরা যাক, t-সময়ে কণা P-র পাদ-স্থানাঙ্ক (r, p) (চিত্র 4·2)—অর্থাৎ, P বিন্দুতে কণাটির গতিপথ C-র স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বদূরত্ব $OM = p$, এবং অর OP, স্পর্শক PM-এর সঙ্গে ϕ কোণ করে। P বিন্দুর মেরুস্থানাঙ্ক (r, θ). তাহলে, P বিন্দুতে বক্রের অভিলম্ব দিশা

---

(1) Neils Bohr (1885–1962)

MO দিশার সমান্তরাল লক্ষ্য ক'রে, অভিলম্ব দিশায় বক্রতা-কেন্দ্র অভিমুখে গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{v^2}{\rho}=F(r)\sin\phi, \tag{10a}$$

যেখানে ρ বক্র C-র বক্রতা-ব্যাসার্ধ সূচিত করে। আবার ত্রিভুজ OPM থেকে দেখা যায়

$$p=r\sin\phi. \tag{10b}$$

অবকলন গণিত থেকে আমরা জানি বক্রতা-ব্যাসার্ধের মান হ'ল

$$\rho=r\frac{dr}{dp}. \tag{10c}$$

(10b) এবং (10c) থেকে যথাক্রমে $\sin\phi$ এবং ρ-র মান (10a) সমীকরণে বসিয়ে আসে

$$m\frac{1}{r}\frac{dp}{dr}\cdot v^2=F(r)\frac{p}{r},$$

(5) সমীকরণ থেকে v-র মান এখানে বসিয়ে সরল ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}=P, \tag{11}$$

যেখানে $P=F(r)/m$, প্রতি একক ভরের জন্য ক্রিয়াশীল বলের পরিমাণ সূচিত করে।

(11) একটি প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ এবং অনেকক্ষেত্রে এই সমীকরণের সমাধান (9)-এর চেয়ে সহজতর হয়। পরবর্তী অধ্যায়ে এই ধরনের কিছু কিছু সমস্যার আলোচনা করা হবে। (11) সমাধান ক'রে, কেন্দ্রীয় কক্ষপথের পাদ সমীকরণ লাভ করা যাবে। আর, যদি কক্ষপথের পাদ সমীকরণ জানা থাকে, তবে (11) থেকে ক্রিয়াশীল বল নির্ণয় করা যায়।

আলোচনার সুবিধার জন্য কিছু সুপরিচিত বক্রের পাদ সমীকরণের তালিকা নিম্নে প্রদত্ত হ'ল। এসম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনার জন্য অবকলন গণিতের পুস্তক দ্রষ্টব্য।

কয়েকটি সুপরিচিত বক্রের পাদ সমীকরণ

	বক্রের কার্তেসীয় সমীকরণ	মূলবিন্দু	পাদ সমীকরণ
1.	বৃত্ত : $x^2+y^2=a^2$	কেন্দ্র	$p=r.$
2.	বৃত্ত : $x^2+y^2=a^2$	পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দু	$r^2=2ap.$
3.	অধিবৃত্ত : $y^2=4ax$	নাভিবিন্দু	$p^2=ar.$
4.	উপবৃত্ত : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	নাভিবিন্দু	$\frac{b^2}{p^2}=\frac{2a}{r}-1.$
5.	পরাবৃত্ত : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	নাভিবিন্দু	$\frac{b^2}{p^2}=\frac{2a}{r}+1$ (নিকটবর্তী শাখা), $b^2/p^2=1-(2a/r)$ (দূরবর্তী শাখা)
6.	সমকোণীয় পরাবৃত্ত : $x^2-y^2=a^2$	কেন্দ্র	$pr=a^2.$
7.	মেরু-স্থানাঙ্কে সমীকরণ $r^n=a^n \cos n\theta$ অথবা $r^n=a^n \sin n\theta$	মূলবিন্দু	$r^{n+1}=a^n p.$

পাদ সমীকরণ কিভাবে নির্ণয় করা যায় তা একটি উদাহরণের সাহায্যে নিম্নে দেখানো হচ্ছে। বিস্তারিত আলোচনা অবকলন গণিতের পুস্তকে পাওয়া যাবে। উদাহরণ স্বরূপ 7নং বক্রটি গ্রহণ করা হ'ল।

উদাহরণ 2. $r^n=a^n \cos n\theta.$

এখানে, θ সাপেক্ষে উভয়পক্ষের লগারিদমীয় অবকলন করলে আসে

$$n\,\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}=\frac{-n \sin n\theta}{\cos n\theta}.$$

কিন্তু আমরা অবকলন গণিত থেকে জানি, অর ও স্পর্শকের অন্তর্বর্তী কোণ ϕ-এর জন্য

$$\cot \phi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}$$

অতএব, এক্ষেত্রে

$$\cot \phi = -\tan n\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right)\cdot$$

কাজেই, $\phi = \frac{\pi}{2} +$

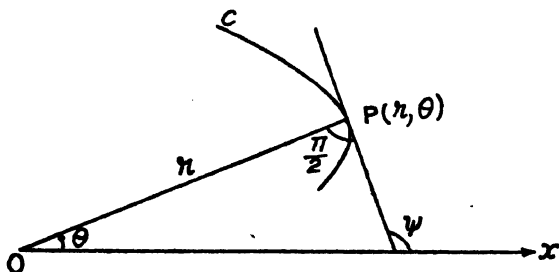
$$p = r \sin \phi = r \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) = r \cos n\theta$$

কাজেই, বক্রের সমীকরণের সাহায্যে

$$p = r\cdot\frac{r^n}{a^n}$$

অর্থাৎ,

$$r^{n+1} = a^n p.$$

4·4. কেন্দ্রীয় কক্ষপথের অপদূরক নির্ণয়—পূর্বেই বলা হয়েছে, কেন্দ্রীয় কক্ষপথে P যদি এমন কোন বিন্দু হয় যে, অর OP ঐ বিন্দুতে কক্ষপথের অভিলম্ব হবে, তবে অর OP-কে **অপদূরক রেখা** বলে। P বিন্দুকে বলা হয় অপদূরক (চিত্র 4·4)।

চিত্র 4·4—অপদূরক

স্পষ্টতঃ অপদূরক রেখা OP-র জন্য অর ও স্পর্শকের অন্তর্বর্তী কোণ

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

কাজেই, সেক্ষেত্রে

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \cot\phi\Big]_{\phi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

অর্থাৎ

$$\frac{dr}{d\theta} = 0, \tag{12a}$$

অথবা,

$$\frac{du}{d\theta} = 0. \tag{12b}$$

সুতরাং, অপদূরক বিন্দুতে অরের ব্যস্ত রাশি u-র জন্য

$$\frac{du}{d\theta} = 0. \tag{12}$$

এখান থেকে দেখা যায়, অপদূরক বিন্দুতে অর অথবা অর-এর ব্যস্ত রাশির মান চরম বা অবম হয়। আরও লক্ষ্য করার বিষয় যে অপদূরক বিন্দুতে p এবং r-র মান সমান হয়—

$$p = r\sin\phi\Big]_{\phi=\frac{\pi}{2}} = r. \tag{13}$$

উদাহরণ 3. ব্যস্ত বর্গীয় কেন্দ্রীয় আকর্ষক বলের ক্রিয়ায় একটি কণা অধিবৃত্ত কক্ষপথ

$$\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$$

রচনা করছে। $\theta = 0$ বিন্দু থেকে $\theta = \beta$ বিন্দু পর্যন্ত গমন করতে প্রয়োজনীয় সময় নির্ণয় করতে হবে।

ইতিপূর্বে (3) সমীকরণে আমরা দেখেছি, কেন্দ্রীয় কক্ষপথের জন্য

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h = \text{ধ্রুবক।} \tag{i}$$

কাজেই,

$$\frac{l^2}{(1+\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}=h,$$

যেখানে l কক্ষপথের অর্ধনাভিলম্ব সূচিত করে। সরল ক'রে, এবং $\theta=0$ বিন্দুতে $t=0$ ধ'রে, $\theta=\beta$ বিন্দু পর্যন্ত পৌঁছনোর প্রয়োজনীয় সময় t-র মান, সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$\int_{t=0}^{t}\frac{h}{l^2}dt=\int_{\theta=0}^{\beta}\frac{d\theta}{4\cos^4\frac{\theta}{2}} \qquad \text{(ii)}$$

এখানে, ডানদিকের সমাকলটির মান $\tan\frac{\theta}{2}=z$ প্রতিস্থাপন ক'রে সহজেই নির্ণয় করা যায়। আমরা দেখি, $dz=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}$ এবং অনিশ্চিত সমাকল

$$\int\frac{d\theta}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}=\int\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\int\frac{1}{2}(1+z^2)dz=\frac{1}{2}\left(z+\frac{z^3}{3}\right)+\text{সমাকলন অচর।}$$

কাজেই

$$\int_0^{\beta}\frac{d\theta}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)\Bigg]_{\theta=0}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\beta}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\beta}{2}\right).$$

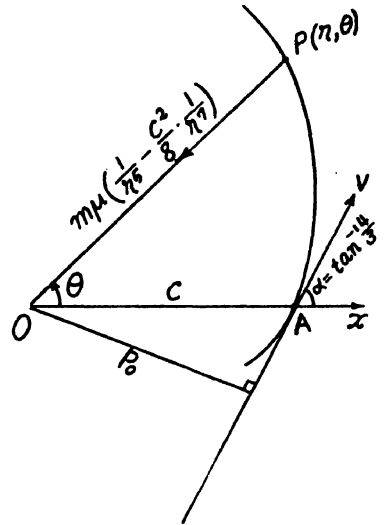
এই মান (ii)-এ বসিয়ে, বামপক্ষের সমাকলন ক'রে ও সরল ক'রে, নির্ণেয় সময়ের মান

$$t=\frac{l^2}{2h}\left(\tan\frac{\beta}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\beta}{2}\right).$$

* **উদাহরণ 4.** প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষক বল হ'ল $\mu\left(\frac{1}{r^5}-\frac{c^2}{8}\cdot\frac{1}{r^7}\right)$. কণাটিকে বলকেন্দ্র থেকে c-দূরত্বে, অরের সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণে এমন বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল যা ঐ দূরত্বে বৃত্তাকার কক্ষপথের বেগের $\sqrt{\frac{25}{7}}$ গুণের সমান। দেখাতে হবে যে কণাটির কক্ষপথ

$$4r^2-c^2=\frac{3c^2}{(1-\theta)^2}.$$

ধরা যাক, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি $P(r,\ \theta)$, এবং O বিন্দু বলকেন্দ্র। আদি সময়ে A বিন্দু থেকে, OA রেখার সঙ্গে $\alpha=\tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণে V বেগে কণাটিকে নিক্ষেপ করা হয়েছে। তাহলে, প্রদত্ত সর্তানুসারে $OA=c$. মূলবিন্দু থেকে c-দূরত্বে প্রদত্ত বলের ক্রিয়ায় বৃত্তাকার কক্ষপথের বেগ V_1 হলে

$m\frac{V_1^2}{c}=$ অভিকেন্দ্র দিশায় বল

$$=m\mu\left(\frac{1}{r^5}-\frac{c^2}{8}\cdot\frac{1}{r^7}\right)\bigg]_{r=c}=m\mu\cdot\frac{7}{8c^5},$$

যেখানে m কণাটির ভর সূচিত করে। তাহলে, সরল ক'রে ও বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আসে

$$V_1=\left(\frac{7\mu}{8c^4}\right)^{1/2}.$$

প্রদত্ত সর্তানুসারে, আদি নিক্ষেপ বেগের পরিমাণ

$$V=\sqrt{\frac{25}{7}}V_1=\left(\frac{25\mu}{8c^4}\right)^{1/2} \qquad \text{(i)}$$

মূলবিন্দু O থেকে আদি নিক্ষেপ দিশার লম্বদূরত্ব p_0 হলে, প্রদত্ত সর্তানুসারে

$$p_0 = c \sin \alpha = \frac{4c}{5}. \tag{ii}$$

কিন্তু আমরা জানি, কেন্দ্রীয় কক্ষপথে

$$Vp_0 = h = \text{ধ্রুবক।}$$

কাজেই (i) ও (ii)-এর সাহায্যে পাওয়া যায়

$$\left(\frac{25\mu}{8c^4}\right)^{1/2} \frac{4c}{5} = h,$$

অর্থাৎ

$$\frac{2\mu}{c^2} = h^2. \tag{iii}$$

(9) অনুযায়ী কণাটির কক্ষপথের অবকলন সমীকরণ হ'ল

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{h^2u^2}\cdot\mu\left(u^5 - \frac{c^2}{8}u^7\right),$$

যেখানে $u = \frac{1}{r}$. এখানে (iii)-র সাহায্যে $\frac{\mu}{h^2}$ অপনয়ন ক'রে ও সরল করলে আসে

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{c^2}{2}\left(u^3 - \frac{c^2}{8}u^5\right).$$

উভয়পক্ষকে $2\frac{du}{d\theta}$ দ্বারা গুণ ক'রে ও সমাকলন ক'রে আমরা পাই

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = c^2\left(\frac{u^4}{4} - \frac{c^2}{8}\cdot\frac{u^6}{6}\right) + k_1 \tag{iv}$$

যেখানে k_1 সমাকলন অচর সূচিত করে। কিন্তু, অবকল গণিতের সুপরিচিত সূত্র অনুযায়ী

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{p^2}, \tag{v}$$

যেখানে মূলবিন্দু থেকে কক্ষপথের স্পর্শকের লম্বদূরত্ব হ'ল p. আদি সময়ে কণাটি মূলবিন্দু থেকে c দূরত্বে ছিল, অর্থাৎ $u=\frac{1}{c}$, এবং $p=p_0=\frac{4c}{5}$. কাজেই (iv) ও (v) থেকে এই আদি দশার সাহায্যে পাই

$$1\Big/\frac{16c^2}{25}=c^2\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{c^4}-\frac{c^2}{8}\cdot\frac{1}{6c^6}\right)+k_1.$$

সরল ক'রে k_1-র মান আসে

$$k_1=\frac{4}{3c^2}.$$

এই মান (iv)-এ বসিয়ে, ও বাঁদিকের দ্বিতীয় পদ পক্ষান্তর করলে এবং সরল করলে দাঁড়ায়

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{1}{48c^2}(4-c^2u^2)^3.$$

ঋণাত্মক বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{du}{(4-c^2u^2)^{3/2}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}c}\,d\theta \qquad \text{(vi)}$$

এখানে ঋণাত্মক বর্গমূল গ্রহণ করার অর্থ হ'ল $\frac{dr}{d\theta}>0$, অর্থাৎ আমরা ধরছি, কোণ θ-বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে মূলবিন্দু থেকে কণাটির দূরত্ব বৃদ্ধি পাচ্ছে। উভয়-পক্ষের সমাকলন ক'রে আসে

$$\frac{1}{4}\,\frac{u}{\sqrt{4-c^2u^2}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}c}\,\theta+k_2,$$

যেখানে k_2 সমাকলন অচর (লক্ষণীয় যে, $cu=2\sin\beta$ প্রতিস্থাপন ক'রে (vi)-র বামপক্ষের সমাকলটির মান সহজেই নির্ণয় করা যায়)। এখানে u-র পরিবর্তে $\frac{1}{r}$ বসিয়ে সরল করলে আসে

$$\frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{4r^2-c^2}}=-\theta+k_3 \qquad \text{(vii)}$$

যেখানে k_3 নতুন অচর। আদি দশায় $r=c,\ \theta=0$ ধ'রে দেখা যায়

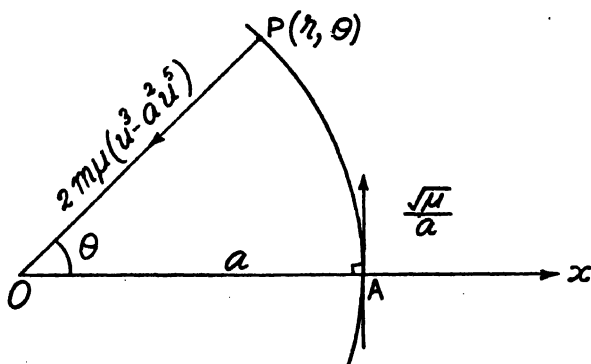
$$1=0+k_3$$

k_3-র মান (vii)-এ বসিয়ে সরল ক'রে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ আসে

$$4r^2-c^2=\frac{3c^2}{(1-\theta)^2}.$$

উদাহরণ 5. প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষক বল হ'ল $2\mu(u^3-a^2u^5)$, যেখানে $u=\dfrac{1}{r}$. কণাটিকে মূলবিন্দু থেকে a দূরত্বে, অপদূরক বিন্দু থেকে $\sqrt{\mu}/a$ বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। দেখাতে হবে যে, r-অবস্থিতিতে পৌঁছতে প্রয়োজনীয় সময় t হ'ল

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[r\sqrt{r^2-a^2}+a^2 ln\left|\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right|\right].$$

ধরা যাক, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি $P(r,\theta)$. কণাটিকে অপদূরক বিন্দু

A থেকে $\sqrt{\mu}/a$ বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল, যেখানে $OA=a$. (9) অনুযায়ী কণাটির কক্ষপথের অবকল সমীকরণ হ'ল

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{1}{h^2u^2}\cdot 2\mu(u^3-a^2u^5),$$

যেখানে $u=1/r$. এই সমীকরণের ডানদিককে সরল ক'রে, উভয়পক্ষকে $2\dfrac{du}{d\theta}$ দ্বারা গুণ ক'রে ও সমাকলন ক'রে আমরা পাই

$$v^2=h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\mu(2u^3-a^2u^4)+c \qquad \text{(i)}$$

যেখানে c সমাকলন অচর সূচিত করে। আদি সময়ে অপদূরক বিন্দুতে বেগ $\sqrt{\mu}/a$, অর্থাৎ,

$$t=0,\quad u=\frac{1}{a},\quad v=\frac{\sqrt{\mu}}{a},\quad \frac{du}{d\theta}=0.$$

এই মান (i)-এ বসিয়ে আসে

$$\frac{\mu}{a^2}=h^2\left[0+\frac{1}{a^2}\right]=\mu\left(\frac{2}{a^3}-a^2\cdot\frac{1}{a^4}\right)+c.$$

সুতরাং, $h^2=\mu$ এবং $c=0$. এই মান (i)-এ বসিয়ে এবং সরল ক'রে আমরা পাই

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2(1-a^2u^2).$$

বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আসে

$$\frac{du}{d\theta}=\pm u\sqrt{1-a^2u^2}. \qquad \text{(ii)}$$

এখান থেকে দেখা যায়, কণাটির বাস্তব অবস্থিতির জন্য $a^2u^2<1$, অর্থাৎ $r^2>a^2$. যদি ধরা হয় θ-বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে r-বৃদ্ধি পায় তবে $\dfrac{dr}{d\theta}<0$, —অর্থাৎ $\dfrac{du}{d\theta}<0$, এবং (ii) সমীকরণের ডান দিকে ঋণাত্মক চিহ্নটি গ্রহণ করতে হবে। উপরন্তু, কণাটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণের সমীকরণ

$$\frac{d\theta}{dt}=hu^2$$

দ্বারা (ii)-র উভয়পক্ষকে গুণ ক'রে, ডানদিকে ঋণাত্মক চিহ্নের জন্য আমরা পাই

$$\frac{du}{dt}=-hu^3\sqrt{1-a^2u^2}. \qquad \text{(iii)}$$

কিন্তু $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{dr}{dt}.$

(iii)-এ $h=\sqrt{\mu}$ ও $u=1/r$ বসিয়ে এবং সরল ক'রে আমরা পাই

$$\sqrt{\mu}\,dt=\frac{r^2}{\sqrt{r^2-a^2}}\,dr \qquad \text{(iv)}$$

(iv)-র ডানদিকের সমাকলটির মান নিম্নরূপে নির্ণয় করা যায়—

$$I\equiv\int\frac{r^2}{\sqrt{r^2-a^2}}\,dr=\int\frac{r^2-a^2+a^2}{\sqrt{r^2-a^2}}\,dr$$

$$=\int\sqrt{r^2-a^2}\,dr+a^2\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-a^2}}.$$

এখানে ডানদিকের প্রথম পদে একবার আংশিক সমাকলন ক'রে, ও দ্বিতীয় পদটির সমাকলন ক'রে আসে

$$I=r\sqrt{r^2-a^2}-\int\frac{r^2}{\sqrt{r^2-a^2}}\,dr+a^2\,ln|r+\sqrt{r^2-a^2}|,$$

যেখানে $ln\equiv\log_e$. ডানদিকের দ্বিতীয় পদটি পক্ষান্তর ক'রে ও 2 দিয়ে ভাগ ক'রে আমরা পাই,

$$I=\tfrac{1}{2}[r\sqrt{r^2-a^2}+a^2\,ln|r+\sqrt{r^2-a^2}|].$$

এই মান ব্যবহার ক'রে (iv)-র উভয়পক্ষের সমাকলন ক'রে আসে

$$\sqrt{\mu}\,t=\tfrac{1}{2}[r\sqrt{r^2-a^2}+a^2\,ln|r+\sqrt{r^2-a^2}|]+k, \qquad \text{(v)}$$

যেখানে k সমাকলন অচর সূচিত করে। আদি সময়ে, $t=0,\ r=a$ এখানে বসিয়ে আসে

$$0=\tfrac{1}{2}[0+a^2ln|a|]+k.$$

এখান থেকে k-র মান (v)-এ বসিয়ে ও উভয়পক্ষকে $\sqrt{\mu}$ দ্বারা ভাগ ক'রে দাঁড়ায়

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[r\sqrt{r^2-a^2}+a^2\,ln\quad r+\sqrt{r^2-a^2}\quad\right].$$

লক্ষণীয় যে, (ii) সমীকরণের ডানদিকে ঋণাত্মক চিহ্নটি গ্রহণ করলে নির্ণেয় সময়ের মান ঋণাত্মক আসে, যা অর্থবহ নয়। উপরন্তু, লক্ষণীয় যে, ডানদিকে দ্বিতীয় পদে r, a, $\sqrt{r^2-a^2}$ ধনাত্মক। কাজেই

$$ln\left|\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right|=ln\left(\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right).$$

প্রশ্নমালা 4

1. কেন্দ্রীয় বলের ক্রিয়ায় একটি কণা সমতলে সুষমকোণী সর্পিল রচনা করলে দেখাও যে বলের নিয়ম হ'ল

$$P\,\alpha\,\frac{1}{r^3}.$$

2. কেন্দ্রীয় বলের ক্রিয়ায় একটি কণা বৃত্ত রচনা করছে। পরিধিস্থ কোন একটি বিন্দু বলকেন্দ্র হলে দেখাও যে বলের নিয়ম হ'ল

$$P\,\alpha\,\frac{1}{r^5}.$$

3. কেন্দ্রীয় বলের ক্রিয়ায় একটি কণা সমতলে

$$r^n\cos n\theta=a^n$$

বক্রটি রচনা করলে দেখাও যে বলের নিয়ম হ'ল

$$P\,\alpha\,r^{2n-3}.$$

4. কেন্দ্রীয় বলের ক্রিয়ায় একটি কণা সমতলে

$$r=a(1+\cos\theta)$$

বক্রটি রচনা করলে দেখাও যে বলের নিয়ম হ'ল

$$P\,\alpha\,\frac{1}{r^4}.$$

5. কেন্দ্রীয় বলাধীন একটি কণা উপবৃত্ত রচনা করছে। ক্রিয়াশীল বল উপবৃত্তটির কেন্দ্রাভিমুখী হলে দেখাও যে বলটি কেন্দ্র থেকে কণার দূরত্বের সমানুপাতিক।

6. দেখাও যে, যে কোন কেন্দ্রীয় বলের ক্রিয়ায় কণার একটি সম্ভবপর গতিপথ হ'ল বৃত্ত।

7. সমতলে কেন্দ্রীয় বলাধীন একটি কণা সমবাহু পরাবৃত্ত রচনা করছে। বলের নিয়ম নির্ণয় কর।

8. আকর্ষক কেন্দ্রীয় বল যদি এমন হয় যে, যে কোন দূরত্বে বৃত্তপথের বেগ সেই দূরত্ব পর্যন্ত অনন্তাগমন বেগের সমান, তবে দেখাও যে, বল দূরত্বের তৃতীয়ঘাতের ব্যস্ত সমানুপাতিক।

9. প্রতি একক ভরের জন্য কেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল হ'ল

$$\frac{\lambda}{r^3}+f,$$

যেখানে f ধ্রুবক। কণাটিকে যদি c দূরত্বে অবস্থিত অপদূরক থেকে $\sqrt{\lambda}/c$ বেগে নিক্ষেপ করা হয়, তবে দেখাও যে t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি

$$r=c-\tfrac{1}{2}ft^2.$$

10. সমতলে গমনরত একটি কণা কেন্দ্রীয় বলের ক্রিয়ায় হৃদ্‌বক্র $r=a(1-\cos\theta)$ রচনা করছে। বলের নিয়ম নির্ণয় কর। অপদূরক বিন্দুতে বল এবং বেগের পরিমাণ যথাক্রমে F ও V হলে, দেখাও যে

$$4a\mathrm{F}=3\mathrm{V}^2.$$

11. মূলবিন্দু অভিমুখে বলের ক্রিয়ায় m ভর-বিশিষ্ট একটি কণা $r=\dfrac{c}{2+\cos 2\theta}$, বক্রটি রচনা করছে। দূরবর্তী অপদূরকে কণাটির বেগ V হলে বলের নিয়ম নির্ণয় কর।

*12. প্রতি একক ভরের জন্য কেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল হ'ল λ/r^3. আদি সময়ে কণাটিকে মূলবিন্দু থেকে c দূরত্বে, মূলবিন্দু ও আদি অবস্থিতি সংযোগকারী রেখার সঙ্গে

$\frac{\pi}{4}$ কোণে $\sqrt{\lambda}/c$ বেগে নিক্ষেপ করা হলে, দেখাও যে কক্ষপথ সুষমকোণী সর্পিল

$$r = c.e^{\theta}.$$

*13. প্রতি একক ভরের জন্য কেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল হ'ল

$$\frac{\lambda}{r^3}\left(3+\frac{2c^2}{r^2}\right).$$

কণাটিকে মূলবিন্দু থেকে c-দূরত্বে, অক্ষের সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণে $\frac{\sqrt{5\lambda}}{a}$ বেগে নিক্ষেপ করা হলে, দেখাও যে কণাটির কক্ষপথ হ'ল

$$r = c \tan\theta.$$

*14. একটি হাল্কা সরু স্থিতিস্থাপক রজ্জুর একপ্রান্তে M ভর-বিশিষ্ট একটি কণা বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্ত স্থির। রজ্জুটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l এবং স্থিতিস্থাপক-গুণাংক Mng. কণাটিকে l-দূরত্বে অবস্থিত অপদূরক বিন্দু থেকে $\sqrt{2pgh}$ বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। দেখাও যে অপর অপদূরক নির্ণয়ের সমীকরণ হ'ল

$$nr^2(r-l)-2phl(r+l)=0.$$

*15. প্রতি একক ভরের জন্য কেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল হ'ল

$$\lambda\left(r+\frac{a^4}{r^3}\right).$$

কণাটিকে a-দূরত্বে অবস্থিত অপদূরক থেকে $2a\sqrt{\lambda}$ বেগে নিক্ষেপ করা হলে, দেখাও যে কণাটির গতিপথ

$$r^2(2+\cos\sqrt{3}\,\theta)=3a^2.$$

16. কেন্দ্রীয় কক্ষপথে কোন অবস্থিতিতে একটি কণার বেগ ঐ দূরত্বে বৃত্তাকার কক্ষপথের বেগের $\frac{1}{m}$ তম অংশ। দেখাও যে বলের নিয়ম হ'ল

$$P \propto \frac{1}{r^{2m^2+1}}.$$

*17. প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষক বল $\frac{\lambda}{r^4}$. বলকেন্দ্র থেকে c-দূরত্বে কণাটিকে অনুপ্রস্থ দিশায় $\sqrt{2\lambda/3c^3}$ বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। কণাটির কক্ষপথ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে বলকেন্দ্র পর্যন্ত পৌঁছতে প্রয়োজনীয় সময় হ'ল

$$\frac{3\pi}{16}\left(\frac{6c^5}{\lambda}\right)^{1/2}$$

*18. প্রতি একক ভরের জন্য কেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল হ'ল

$$\lambda(r^5 - a^4 r).$$

কণাটিকে a-দূরত্বে অবস্থিত অপদূরক থেকে $\sqrt{\frac{2\lambda}{3}}\, a^3$ বেগে নিক্ষেপ করা হলে, দেখাও যে কণাটির কক্ষপথ হ'ল

$$x^4 + y^4 = a^4$$

19. প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষক বল হ'ল $\lambda\left(\frac{3}{r^3} + \frac{2a^2}{r^5}\right)$. বলকেন্দ্র থেকে a-দূরত্বে অরের সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণে কণাটিকে এমন বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল যা ঐ দূরত্বে একটি বৃত্তপথের বেগের সমান। দেখাও যে কণাটির কক্ষপথ হ'ল

$$r = a \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

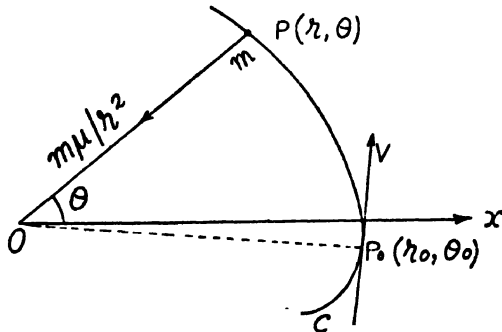
উত্তরমালা 4

7. $P \propto r$

পঞ্চম অধ্যায়

ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম ও গ্রহের গতি

5·1. কেন্দ্রীয় ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম অনুসারী বল-জনিত কণার কক্ষপথ। মহাকর্ষ নিয়ম—কেন্দ্রীয় বলের মধ্যে ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম অনুসারী বল গ্রহের গতি আলোচনায় বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে, কারণ কোন গ্রহের উপর ক্রিয়াশীল বল হ'ল ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম অনুসারী কেন্দ্রীয় বল। গাণিতিক পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন ক্ষেত্রে এরূপ ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম অনুসারী কেন্দ্রীয় বলের ক্রিয়া দেখতে পাওয়া যায়—যেমন, মহাকর্ষীয় বল বা দুটি আহিত কণার মধ্যে কুলম্ব-নিয়ম অনুসারী বল। বর্তমান অধ্যায়ে, ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম অনুসারী কেন্দ্রীয় বল-জনিত কণার গতি আলোচিত হবে।

ধরা যাক, কোন কণার উপর একটি স্থির বিন্দু অভিমুখে ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম অনুসারী কেন্দ্রীয় বল ক্রিয়া করছে। বলকেন্দ্র স্থির বিন্দু O-কে মূলবিন্দু ধ'রে, t-সময়ে কণাটির অবস্থিতি P-র ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক (r, θ) এবং প্রতি একক

চিত্র 5·1—কেন্দ্রীয় ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম অনুসারী বল

ভরের জন্য বলের পরিমাণ $\frac{\mu}{r^2}$ ধরা হ'ল, যেখানে $\mu =$ ধ্রুবক > 0. অরের ব্যস্ত রাশি $u\,(=1/r)$ এবং নতি θ-র রূপে কেন্দ্রীয় কক্ষপথের অবকল

সমীকরণ হ'ল, চতুর্থ অধ্যায়ের (9) অনুযায়ী

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\frac{\mu}{r^2}}{h^2u^2}=\frac{\mu}{h^2}, \tag{1a}$$

এবং

$$\dot{\theta}=hu^2, \tag{1b}$$

যেখানে h একটি ধ্রুবক।

(1a) একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অসমসত্ত্ব অবকল সমীকরণ। সমীকরণটি সমাধান করার জন্য আমরা লক্ষ্য করি যে, এখানে

$$u'=u-\frac{\mu}{h^2} \tag{2a}$$

প্রতিস্থাপন করলে, সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপ আসে

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2}+u'=0,$$

এটি আমাদের পূর্বপরিচিত সরল সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ, যার সাধারণ সমাধান হ'ল

$$u'=\text{A}\cos(\theta+\varepsilon), \tag{2b}$$

যেখানে A এবং ε সমাকলন অচর। এদের মান আদি দশার সাহায্যে নির্ণয় করা যাবে। (2a) থেকে u'-র মান এখানে বসিয়ে এবং u-র স্থলে $1/r$ বসিয়ে (1a)-র সাধারণ সমাধান পাওয়া যায়

$$\frac{1}{r}-\frac{\mu}{h^2}=\text{A}\cos(\theta+\varepsilon). \tag{3}$$

বাঁদিকের দ্বিতীয় পদটি পক্ষান্তর ক'রে এবং μ/h^2 দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{h^2/\mu}{r}=1+\frac{\text{A}h^2}{\mu}\cos(\theta+\varepsilon). \tag{4a}$$

কিন্তু, ধ্রুবীয় স্থানাঙ্কে কনিকের সাধারণ সমীকরণ, হ'ল

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta + \varepsilon), \tag{4b}$$

যেখানে l অর্ধনাভিলম্ব এবং e কনিকের উৎকেন্দ্রতা রূপায়িত করে। (4b) দ্বারা যে চারটি বক্র রূপায়িত করা যায়, তারা হ'ল

পরাবৃত্ত $e > 1$,

অধিবৃত্ত $e = 1$,

উপবৃত্ত $0 < e < 1$,

এবং বৃত্ত $e = 0$.

(4a) এবং (4b) তুলনা ক'রে, আমরা দেখতে পাই **আলোচ্য কণাটির কক্ষপথ একটি কনিক,** যার অর্ধনাভিলম্বের মান হ'ল

$$l = h^2/\mu, \tag{5a}$$

অর্থাৎ,

$$h^2 = \mu l. \tag{5b}$$

আর উৎকেন্দ্রতা হ'ল

$$e = \frac{Ah^2}{\mu}. \tag{6}$$

অচর A-র মান আদি দশার উপর নির্ভর করে। কাজেই, (6) থেকে দেখা যায় কণাটির কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা আদি দশার উপর নির্ভর করে। আর (5a) থেকে লক্ষ্য করা যায়, যে নাভিলম্ব আদি দশার উপর নির্ভর করে না।

ধরা যাক, আদি অবস্থায় কণাটি P_0 বিন্দুতে অবস্থিত এবং কণাটির বেগ **V**, যেখানে P_0 বিন্দুর ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক (r_0, θ_0). সমাকলন অচর A বা কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা নির্ণয়ের জন্য, (2b)-র উভয়পক্ষকে θ-সাপেক্ষে সমাকলন করা হ'ল। (2a) ব্যবহার ক'রে, আমরা পাই

$$\frac{du}{d\theta} = -A \sin(\theta + \varepsilon). \tag{7}$$

(7) এবং (2b)-র উভয়পক্ষকে বর্গ ক'রে যোগ করলে $(\theta+\varepsilon)$ অপনীত হয়। আমরা পাই

$$\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=A^2.$$

সরল করলে দাঁড়ায়

$$\left\{u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}-2\frac{\mu}{h^2}u+\frac{\mu^2}{h^4}==A^2. \tag{8}$$

কিন্তু অবকল গণিতের সুপরিচিত সূত্র অনুযায়ী

$$u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{1}{p^2}, \tag{9}$$

যেখানে মূলবিন্দু থেকে কক্ষপথের স্পর্শকের লম্বদূরত্ব হ'ল p. আবার, (4·5) থেকে আমরা জানি

$$\frac{1}{p}=\frac{v}{h} \tag{10}$$

(9) ও (10)-র সাহায্যে (8) থেকে বেগের পরিমাণ নির্ণয়ের সমীকরণ পাওয়া যায়

$$\frac{v^2}{h^2}-2\frac{\mu}{h^2}u+\frac{\mu^2}{h^4}=A^2 \tag{11}$$

(6)-র সাহায্যে সমাকলন অচর A-কে উৎকেন্দ্রতার রূপে প্রকাশ করলে, আসে

$$\frac{v^2}{h^2}-2\frac{\mu}{h^2}u+\frac{\mu^2}{h^4}=\frac{\mu^2}{h^4}e^2 \tag{12a}$$

আদি অবস্থায় $r=r_0$ অবস্থিতিতে বেগের পরিমাণ $v=V$. কাজেই (12a) সমীকরণে এই মান বসিয়ে এবং সরল ক'রে আমরা পাই

$$V^2-\frac{2\mu}{r_0}=\frac{\mu^2}{h^2}(e^2-1). \tag{13}$$

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি থেকে আমরা জানি, উৎকেন্দ্রতার মান 1-র চেয়ে বড়, সমান বা ক্ষুদ্র হলে কনিকটি যথাক্রমে পরাবৃত্ত, অধিবৃত্ত বা উপবৃত্ত হয়।

সুতরাং, এক্ষেত্রে (13) থেকে দেখা যায় V^2-র মান $\frac{2\mu}{r_0}$ অপেক্ষা বড়, সমান বা ক্ষুদ্র হলে, কক্ষপথটি যথাক্রমে পরাবৃত্ত, অধিবৃত্ত বা উপবৃত্ত হবে। অর্থাৎ নির্ণেয় কক্ষপথ হ'ল

$$\begin{aligned}
&\text{একটি পরাবৃত্ত, যখন } V^2 > \frac{2\mu}{r_0},\\
&\text{একটি অধিবৃত্ত, যখন } V^2 = \frac{2\mu}{r_0},\\
&\text{এবং একটি উপবৃত্ত, যখন } V^2 < \frac{2\mu}{r_0}.
\end{aligned} \tag{14}$$

আর বৃত্তীয় কক্ষপথের জন্য আদি বেগের বর্গের মান হ'ল

$$V^2 = \frac{2\mu}{r_0} - \frac{\mu^2}{h^2}, \tag{14'}$$

কিন্তু
$$\frac{\mu^2}{h^2}(e^2-1) = \frac{\mu}{l}(e^2-1) = \begin{cases} -\frac{1}{a}, & \text{উপবৃত্তের জন্য} \\ 0, & \text{অধিবৃত্তের জন্য} \\ \frac{1}{a}, & \text{পরাবৃত্তের জন্য} \end{cases}$$

সুতরাং

$$V^2 = \begin{cases} \mu\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right) & \text{উপবৃত্ত,} \\ \mu\frac{2}{r_0} & \text{অধিবৃত্ত,} \\ \mu\left(\frac{2}{r_0} + \frac{1}{a}\right) & \text{পরাবৃত্তের জন্য।} \end{cases} \tag{13'}$$

2·4 অনুচ্ছেদের (38) সমীকরণে $ga^2 = \mu$ এবং $x = r_0$ বসিয়ে দেখা যায়, μ/r^2 ব্যস্ত-বর্গীয় বলের ক্ষেত্রে, অসীম দূরত্বে ($h \to \infty$) একটি কণাকে ছেড়ে দিলে, r_0 দূরত্ব পর্যন্ত আসতে কণাটি যে বেগ লাভ করে, তার পরিমাণ হ'ল

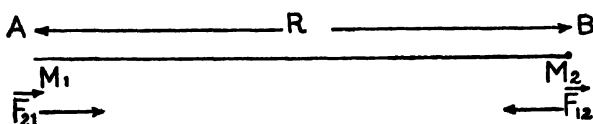
$$V = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}. \tag{15}$$

এই বেগের পরিমাণকে **অনন্তাগমন** বেগ, অথবা **পলায়ন বেগ** বলা

হয়। তাহলে, (14) অনুযায়ী ব্যস্ত-বর্গীয় বলের ক্ষেত্রে কণাটির আদি বেগ অনন্ত্যাগমন বেগের অধিক হলে কক্ষপথ একটি পরাবৃত্ত হবে, সমান হলে অধিবৃত্ত হবে আর ক্ষুদ্র হলে উপবৃত্ত হবে। অনেকক্ষেত্রে অবশ্য, কণাটির আদি বেগ জানা সম্ভবপর হয় না। যেমন, সৌরমণ্ডলে গ্রহগণের আদি বেগ আমরা জানি না। সেরূপ ক্ষেত্রে অজ্ঞাত সমাকলন অচর মোট শক্তির মাধ্যমে প্রকাশ করা অধিকতর অর্থবহ। 5·3 অনুচ্ছেদে এবিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। উপবৃত্তীয় কক্ষপথের জন্য পর্যায়কাল পরবর্তী অনুচ্ছেদে নির্ণয় করা হয়েছে।

মহাকর্ষ নিয়ম—সৌরজগতে গ্রহের, উপগ্রহের বা যুগ্মতারার গতি-নির্ণয়ে উপরে প্রদত্ত আলোচনার প্রয়োগ দেখতে পাওয়া যায়। এরূপ ক্ষেত্রে ক্রিয়াশীল বল হ'ল **মহাকর্ষীয় বল**। মহাকর্ষীয় বলের সংজ্ঞা **নিউটন প্রদত্ত মহাকর্ষ নিয়ম** থেকে পাওয়া যায়। মহাকর্ষ নিয়মটি নিম্নরূপ ঃ

ব্রহ্মাণ্ডের যে কোন দুটি বস্তু একে অপরকে আকর্ষণ করে। আকর্ষক বলটি বস্তুদ্বয়ের ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং অন্তর্বর্তী দূরত্বের ব্যস্ত সমানুপাতিক।

বর্তমান আলোচনায় বস্তু শব্দটি কণা অর্থে ব্যবহার করা হবে। ধরা

চিত্র 5·2—মহাকর্ষ নিয়মের ব্যাখ্যা

যাক, A এবং B বিন্দুতে যথাক্রমে M_1 ও M_2 ভর অবস্থিত এবং অন্তর্বর্তী দূরত্ব $AB = R$. তাহলে মহাকর্ষ নিয়ম অনুযায়ী একে অপরকে যে বলের দ্বারা আকর্ষণ করে তার পরিমাণ হ'ল

$$F = G\frac{M_1 M_2}{R^2}, \tag{16a}$$

যেখানে G মহাকর্ষীয় ধ্রুবক সূচিত করে। লক্ষ্য করার বিষয় যে বলটি একটি আকর্ষক বল—অর্থাৎ দ্বিতীয় বস্তুর উপর প্রথম বস্তু-জনিত বল $\mathbf{F}_{12}$,

$\overrightarrow{BA}$ দিশায় ক্রিয়া করে। বলটির পরিমাণ (16*a*) দ্বারা প্রদত্ত হয়েছে। কাজেই,

$$F_{12} = -G\frac{M_1M_2}{R^2}\hat{R}. \qquad (16b)$$

যেখানে $\overrightarrow{AB}$ দিশায় একক ভেক্টর $\hat{R}$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। অনুরূপভাবে, প্রথম বস্তুর উপর দ্বিতীয় বস্তু-জনিত বল F_{21} হ'ল

$$F_{21} = \frac{GM_1M_2}{R^2}\hat{R}. \qquad (16c)$$

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G-র আসন্ন মান হ'ল

$$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-8}\ cm^3/gm\text{-}sec^2. \qquad (16d)$$

উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞা থেকে দেখা যায়, যে মহাকর্ষীয় বল একটি ব্যস্ত-বর্গীয় কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল। সৌরজগতে গ্রহ এবং উপগ্রহের গতি নির্ণয়ে মহাকর্ষ নিয়মের প্রয়োগে নির্ভুল ফল পাওয়া গিয়েছে—যা নিয়মটির যথার্থতা সূচিত করে।

দুটি বস্তুর মধ্যে মহাকর্ষীয় বলের ক্রিয়ায় যে গতি উদ্ভূত হয়, সেই গতি-নিরূপণ করাকে **কেপলার সমস্যা** বলা হয়। কেপলার সমস্যাতে উভয় বস্তুই গতিশীল। বাস্তবে কোন কোন ক্ষেত্রে দেখা যায়, যে বস্তুদ্বয়ের মধ্যে একটির ভর অপরটির তুলনায় অতিশয় ক্ষুদ্র। যেমন, আমরা জানি সূর্যের ভরের তুলনায় যে কোন গ্রহের ভর অতি ক্ষুদ্র। পৃথিবীর ভরকে একক ধরলে সূর্য ও কয়েকটি গ্রহের ভর নিম্নরূপ ঃ

বস্তু	ভর
সূর্য	330000
বৃহস্পতি	320
পৃথিবী	1
বুধ	$\frac{1}{18}$
চন্দ্র	$\frac{1}{81}$

সারণী ঃ পৃথিবীর তুলনায় সূর্য এবং কয়েকটি গ্রহ-উপগ্রহের ভর

কাজেই, গ্রহ বা উপগ্রহের গতি আলোচনায় সূর্যকে আসন্নভাবে স্থির ধরা চলে। অন্যান্য গ্রহের প্রভাব হিসেবের মধ্যে না ধ'রে, বর্তমান অনুচ্ছেদের আলোচনা, কেপলার সমস্যার একটি বিশেষ ক্ষেত্রে গ্রহের গতি-নির্ণয়ে প্রয়োগ করা যায়, যে ক্ষেত্রে বস্তুদ্বয়ের মধ্যে অধিকতর ভারী বস্তুটি স্থির থাকে। সাধারণ কেপলার সমস্যা, যেখানে উভয় বস্তুই গতিশীল, 5·5 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে।

উপরে আলোচিত সমস্যার বিপরীত সমস্যা, অর্থাৎ যেখানে কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার কক্ষপথ প্রদত্ত আছে এবং বলের নিয়ম নির্ণয় করা প্রয়োজন —ইতিপূর্বে 4·2 অনুচ্ছেদে আলোচিত হয়েছে। ঐ অনুচ্ছেদের উদাহরণে দেখানো হয়েছে যে **কেন্দ্রীয় কক্ষপথ একটি কনিক হলে, বলের নিয়ম হ'ল ব্যস্ত-বর্গীয়।**

5·2. পাদ-স্থানাঙ্কে উপরোক্ত কক্ষপথ—পাদ-স্থানাঙ্কে, পূর্বের অনুচ্ছেদে আলোচিত কক্ষপথের সমীকরণ খুব সহজে লাভ করা যায়, —তা এখানে দেখানো হচ্ছে।

4·3 অনুচ্ছেদের (ii) সমীকরণ অনুযায়ী এক্ষেত্রে পাদ-স্থানাঙ্কে কণাটির কক্ষপথের অবকল সমীকরণ হ'ল

$$\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}=\frac{\mu}{r^2}. \tag{17}$$

উভয়পক্ষকে μ দ্বারা ভাগ ক'রে ও সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{h^2/\mu}{-2p^2}=-\frac{1}{r}+c_1$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর সূচিত করে। উভয়পক্ষকে সরল ক'রে লেখা যায়

$$\frac{h^2/\mu}{p^2}=\frac{2}{r}+c, \tag{18}$$

যেখানে c একটি নতুন অচর। 4·3 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত কয়েকটি সুপরিচিত বক্রের পাদ-সমীকরণের তালিকা থেকে দেখা যায় (3, 4 ও 5 নং বক্র) সমাকলন অচর c-র মান অনুযায়ী (18) একটি অধিবৃত্ত বা উপবৃত্ত বা পরাবৃত্ত

রূপায়িত করে। c-র মান নির্ণয় করার উদ্দেশ্যে (4·5) সমীকরণ দ্বারা p অপনয়ন ক'রে, (17) থেকে আমরা পাই

$$\frac{v^2}{\mu}=\frac{2}{r}+c. \tag{19}$$

আদি অবস্থায় পূর্বের ন্যায়, $r=r_0$-তে বেগের পরিমাণ $v=V$ ধ'রে, এখান থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{V^2}{\mu}=\frac{2}{r_0}+c.$$

এই সমীকরণ থেকে সমাকলন অচর c-র মান (18)-তে বসালে দাঁড়ায়

$$\frac{h^2/\mu}{p^2}=\frac{2}{r}+\left(\frac{V^2}{\mu}-\frac{2}{r_0}\right). \tag{20}$$

4·3. অনুচ্ছেদের পূর্বোক্ত তালিকা অনুযায়ী, এটি একটি কনিকের সমীকরণ, যার অর্ধনাভিলম্বের মান h^2/μ. যদি $\frac{V^2}{\mu}>\frac{2}{r_0}$ হয়, তবে এটি একটি পরাবৃত্ত হবে, $\frac{V^2}{\mu}=\frac{2}{r_0}$ হলে একটি অধিবৃত্ত, আর $\frac{V^2}{\mu}<\frac{2}{r_0}$ হলে, একটি উপবৃত্ত রূপায়িত করবে। কিন্তু, $\sqrt{2\mu/r_0}$ হ'ল অনন্তাগমন বেগ। কাজেই, আদি-বেগ অনন্তাগমন বেগের অধিক হলে কক্ষপথ পরাবৃত্ত হবে, সমান হলে অধিবৃত্ত আর ক্ষুদ্র হলে উপবৃত্ত হবে।

উপবৃত্তীয় কক্ষপথের পর্যায়কাল—কক্ষপথটি একটি উপবৃত্ত হলে, মূলবিন্দুর চারপাশে একবার সম্পূর্ণরূপে ঘুরে আসতে কণাটির যে সময় লাগে, —অর্থাৎ **কণাটির পর্যায়কালের সঙ্গে, কক্ষপথের পরাক্ষের সম্বন্ধ** সহজেই নির্ণয় করা যায়। 4·1 অনুচ্ছেদের (6) সমীকরণে আমরা দেখেছি মূলবিন্দু থেকে কণাটিকে সংযোগকারী অর যে হারে ক্ষেত্র অতিক্রম করছে তার মান কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবকের অর্ধেকের সমান, —অর্থাৎ $h/2$-র সমান। কণাটির পর্যায়কাল T ধরা হ'ল। তাহলে, T সময়ান্তরে উপরোক্ত অর উপবৃত্ত ক্ষেত্রটি একবার সম্পূর্ণ অতিক্রম করে ব'লে,

$$\frac{h}{2}=\frac{\pi ab}{T},$$

যেখানে a এবং b যথাক্রমে উপবৃত্তটির অর্ধ-পরাক্ষ এবং অর্ধ-উপাক্ষ সূচিত করে। অর্থাৎ,

$$T = \frac{2\pi ab}{h}. \tag{21}$$

কিন্তু $(5b)$ অনুযায়ী

$$h = \sqrt{\mu l}, \tag{22}$$

যেখানে l উপবৃত্তটির অর্ধনাভিলম্ব সূচিত করে। স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সুপরিচিত সূত্র থেকে আমরা জানি $l = b^2/a$. অর্ধনাভিলম্বের এই মান (22)-এ বসিয়ে, এবং (21) সমীকরণে (22) ব্যবহার ক'রে দাঁড়ায়

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2}, \tag{23a}$$

$$\text{অর্থাৎ,} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} \cdot a^3. \tag{23b}$$

এখান থেকে দেখা যায়, **উপবৃত্তীয় কক্ষপথে কণাটির পর্যায়কালের বর্গ, পরাক্ষের ঘন-এর (≡ তৃতীয় ঘাতের) সমানুপাতিক।**

5·3. মোট শক্তির সঙ্গে উপরোক্ত কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতার সম্বন্ধ—ইতিপূর্বে 4·1 অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি কেন্দ্রীয় কক্ষপথে কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয় এবং প্রতি একক ভরের জন্য কৌণিক ভরবেগের পরিমাণ হ'ল h, যা একটি ধ্রুবক। কণাটির মোট শক্তি E-ও একটি ধ্রুবক। কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা e-কে E এবং h ধ্রুবকদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়—তা নিম্নে দেখানো হচ্ছে।

এখানে ক্রিয়াশীল বল F হ'ল

$$F = -m\frac{\mu}{r^2}. \tag{24}$$

কণাটির স্থৈতিক শক্তি $U(r)$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হলে, (1·59) সমীকরণে প্রদত্ত স্থৈতিক শক্তির সংজ্ঞানুসারে

$$U(r) = -\int^{r} \left(-m\frac{\mu}{r^2}\right) dr = -\frac{m\mu}{r}, \tag{25}$$

যেখানে প্রমাণ অবস্থিতি $r=\infty$-তে স্থৈতিক শক্তির মান শূন্য ধরা হয়েছে। কক্ষপথের যে বিন্দুদ্বয়ে অর r-র মান চরম ও অবম হয়, সেই বিন্দুদ্বয়ে অর্থাৎ অপদূরক বিন্দুদ্বয়ে গতীয় শক্তির মান নির্ণয় করা সুবিধাজনক হয়, কারণ সেই বিন্দুদ্বয়ে $\dot{r}$-র মান শূন্য। এক্ষেত্রে কণাটির গতীয় শক্তি K-র মান, (4·3) সমীকরণ ব্যবহার ক'রে আসে

$$K=\frac{1}{2}m\left\{r\dot{\theta}\right\}^2=\frac{1}{2}mh^2\frac{1}{r^2} \tag{26}$$

মূলবিন্দু থেকে কক্ষপথের চরম ও অবম দূরত্বদ্বয়কে যথাক্রমে r_1 এবং r_2 দ্বারা নির্দেশ করা হলে, ঐ বিন্দুদ্বয়ে মোট শক্তি হ'ল

$$E=\frac{1}{2}mh^2\cdot\frac{1}{r_1^2}-m\mu\cdot\frac{1}{r_1}=\frac{1}{2}mh^2\cdot\frac{1}{r_2^2}-m\mu\cdot\frac{1}{r_2} \tag{27}$$

আবার (4*b*) থেকে r_1 এবং r_2-র মান আসে

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1-e}{l}, \quad \text{এবং} \quad \frac{1}{r_2}=\frac{1+e}{l}, \tag{28}$$

(28) থেকে r_1 এবং r_2-র মান (27)-এ বসিয়ে এবং ঐ সমীকরণের দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির গড় নিয়ে পাওয়া যায়

$$E=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{1}{2}mh^2\left(\frac{1-e}{l}\right)^2-m\mu\frac{1-e}{l}\right\}+\left\{\frac{1}{2}mh^2\left(\frac{1+e}{l}\right)^2-m\mu\frac{1+e}{l}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[mh^2\frac{1+e^2}{l^2}-m\mu\frac{2}{l}\right].$$

(5*a*) থেকে l-র মান এখানে ডানদিকে বসিয়ে সরল ক'রে পাওয়া যায়

$$E=-\frac{m\mu^2}{2h^2}(1-e^2), \tag{29a}$$

এবং $$e=\left[1+\frac{2Eh^2}{m\mu^2}\right]^{1/2} \tag{29b}$$

(29a) থেকে দেখা যায়, কক্ষপথ একটি পরাবৃত্ত হলে মোট শক্তি ধনাত্মক হবে, অধিবৃত্ত হলে মোট শক্তি শূন্য হবে এবং উপবৃত্ত হলে মোট শক্তি ঋণাত্মক হবে। লক্ষ্য করার বিষয়, যে বৃত্তীয় কক্ষপথের জন্য $e=0$, এবং মোট শক্তি $E=-m\mu^2/h^2$, ঋণাত্মক। কাজেই, একটি বদ্ধ কক্ষপথের জন্য মোট শক্তি ঋণাত্মক, যেখানে অসীম দূরত্বে শক্তির মান শূন্য ধরা হয়েছে।

উপবৃত্তীয় কক্ষপথের জন্য উপাক্ষ কেবল মোট শক্তির উপর নির্ভর করে, তা খুব সহজে দেখা যায়। এক্ষেত্রে, (5b) ও (29b) ব্যবহার ক'রে আসে

$$\text{অর্ধ-উপাক্ষ} = a = \frac{l}{1-e^2} = l\Big/\left[-\frac{2Eh^2}{m\mu^2}\right] = -\frac{m\mu}{2E}. \qquad (30)$$

পরমাণু গঠন সংক্রান্ত বোরের পরমাণুতত্ত্বে (30) যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে।

5·4. কেপলারের নিয়মাবলী—সপ্তদশ শতাব্দীর গোড়ায় জার্মান জ্যোতির্বিজ্ঞানী কেপলার গ্রহের গতি-বিষয়ক তিনটি নিয়ম প্রদান করেন।[1] সুদীর্ঘকাল ধ'রে গ্রহের গতি পর্যবেক্ষণ ক'রে তিনি এই নিয়ম-তিনটি আবিষ্কার করেন। কেপলারের পূর্বে, ষোড়শ শতাব্দীতে দিনেমার বিজ্ঞানী টাইকো ব্রাহে[2] ও দীর্ঘকাল ধ'রে গ্রহের গতি পর্যবেক্ষণ করেন। কেপলারের নিয়মগুলি মানবজাতির ইতিহাসে পরীক্ষামূলক বিজ্ঞানের অন্যতম শ্রেষ্ঠ অবদান। কেপলারের নিয়মগুলি নিম্নরূপ ঃ

1. **প্রথম নিয়ম**—গ্রহগুলি উপবৃত্তীয় কক্ষপথে সূর্যকে পরিক্রমা করে, এবং কক্ষপথটির নাভিবিন্দুদ্বয়ের একটিতে সূর্য অবস্থিত থাকে।

(1) প্রথম ও দ্বিতীয় নিয়ম 1609 খ্রীষ্টাব্দে কেপলার, "Astronomia nova"-তে প্রকাশ করেন। তৃতীয় নিয়ম প্রকাশিত হয় 1619 খ্রীষ্টাব্দে "Harmonice mundii"-নামক পুস্তকে। মহাকর্ষ নিয়মের সাহায্যে নিউটন গ্রহের গতি ব্যাখ্যা করেন 1687 খ্রীষ্টাব্দে, "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica"-পুস্তকে। নিউটনীয় বলবিদ্যা এবং মহাকর্ষ নিয়মের যাথার্থ সৌরমণ্ডলে গ্রহের গতি আলোচনায় কেপলারের নিয়মাবলী দ্বারা পরীক্ষামূলক উপায়ে প্রমাণিত হ'ল। উপরন্তু প্রখ্যাত বিজ্ঞানী কোপার্নিকাসের তত্ত্ব,—পৃথিবী সূর্যকে পরিক্রমা করে, কেপলারের নিয়মাবলী দ্বারা সমর্থিত হ'ল।

(2) Tycho Brahe (1546—1601)

2. **দ্বিতীয় নিয়ম**—কোন গ্রহের সঙ্গে সংযোগকারী সরলরেখা সমান সময়ান্তরে সমপরিমাণ ক্ষেত্র অতিক্রম করে।

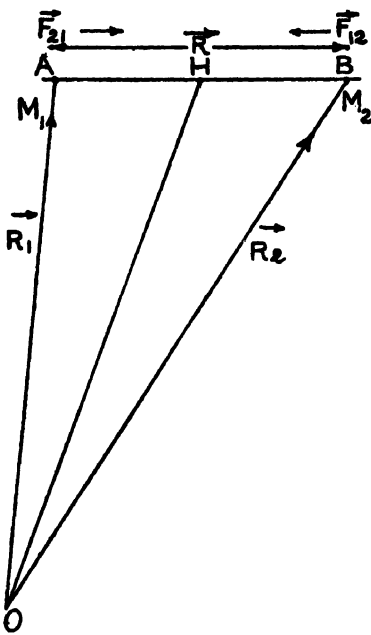
3. **তৃতীয় নিয়ম**—গ্রহগুলির পর্যায়কালের বর্গ কক্ষপথের উপাক্ষের ঘন-এর সমানুপাতিক।

সূর্যকে মূলবিন্দু ধ'রে, মূলবিন্দু থেকে গ্রহটিকে সংযোগকারী রেখা যে হারে ক্ষেত্র অতিক্রম করে, তার মান 4·1 অনুচ্ছেদের $(6a)$ অনুযায়ী প্রতি একক ভরের জন্য মূলবিন্দু সাপেক্ষে গ্রহটির কৌণিক ভরবেগের অর্ধেকের সমান। কেপলারের দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী এই ক্ষেত্র অতিক্রমের হার একটি ধ্রুবক। কাজেই, আলোচ্য গতিতে গ্রহটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয় (গ্রহটির উপর অন্যান্য গ্রহের ক্রিয়া ধরা হয় নি),—অর্থাৎ সময় পরিবর্তনের সঙ্গে কৌণিক ভরবেগ ভেক্টরের পরিমাণ ও দিশা অপরিবর্তিত থাকে। দিশা অপরিবর্তিত থাকার ফলে গ্রহটির গতি একটি সমতলে সীমাবদ্ধ থাকে। আর পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকার ফলে ($r^2\dot{\theta}=$ ধ্রুবক) সংযোগকারী রেখার লম্ব দিশায় ত্বরণের মান শূন্য হয়। প্রথম নিয়ম থেকে (4·2 অনুচ্ছেদের উদাহরণ দ্রষ্টব্য) দেখা যায় বলের নিয়ম হ'ল কেন্দ্রাভিমুখী কেন্দ্রীয় ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম। সুতরাং, এক্ষেত্রে 5·2 অনুচ্ছেদের $(23b)$ সমীকরণে প্রদত্ত পর্যায়কালের সঙ্গে উপাক্ষের সম্বন্ধ, অর্থাৎ তৃতীয় নিয়ম খাটবে। এই আলোচনায় সূর্যকে স্থির ধরা হয়েছে এবং কোন একটি গ্রহের গতি আলোচনায় গ্রহটির উপর অন্য গ্রহের ক্রিয়া ধরা হয় নি।

5·5. কেপলার সমস্যা—দুটি বস্তুর মধ্যে পারস্পরিক মহাকর্ষ-জনিত বলের ক্রিয়ায় যে গতি উদ্ভূত হয়, সেই গতি-নির্ণয় করাকে কেপলার সমস্যা বলে। কেপলার সমস্যার একটি বিশেষ ক্ষেত্র,—যে ক্ষেত্রে বস্তুদ্বয়ের একটি স্থির থাকে, ইতিপূর্বে 5·1 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে।

ধরা যাক, M_1 এবং M_2 ভর-বিশিষ্ট বস্তুদ্বয় যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে অবস্থিত। বর্তমান আলোচনায় বস্তু-দুটিকে কণারূপে ধরা হবে। কোন স্থির বিন্দু O সাপেক্ষে বস্তুদ্বয়ের অবস্থিতি ভেক্টর $\mathbf{R}_1$ এবং $\mathbf{R}_2$ দ্বারা সূচিত করা হ'ল (চিত্র 5·3) এবং $\overrightarrow{AB}=\mathbf{R}$. তাহলে,

$$\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1=\mathbf{R}. \tag{31}$$

এখন, মহাকর্ষ নিয়ম (16*b*) অনুযায়ী M_2 ভরের উপর ক্রিয়াশীল বল $\mathbf{F}_{12}$ হ'ল

চিত্র 5·3—কেপলার সমস্যা

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{GM_1M_2}{R^2}\hat{\mathbf{R}} \quad (32)$$

যেখানে G মহাকর্ষীয় ধ্রুবক সূচিত করে, এবং **R**-র দিশায় একক ভেক্টর হ'ল $\hat{\mathbf{R}}$. কাজেই M_2 ভরের গতীয় সমীকরণ হ'ল (ভর ধ্রুবক ধ'রে)

$$M_2\frac{d^2\mathbf{R}_2}{dt^2} = -\frac{GM_1M_2}{R^2}\hat{\mathbf{R}} \quad (33)$$

প্রথম বস্তুর উপর দ্বিতীয় বস্তু-জনিত মহাকর্ষীয় বল $\mathbf{F}_{21}$-র মান $-\mathbf{F}_{12}$-র সমান ব'লে, প্রথম বস্তুর গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$M_1\frac{d^2\mathbf{R}_1}{dt^2} = \frac{GM_1M_2}{R^2}\cdot\hat{\mathbf{R}} \quad (34)$$

লক্ষ্য করার বিষয়, যে (33) এবং (34) উভয়েই ভেক্টর সমীকরণ। কাজেই, ত্রিমাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশে প্রত্যেকটি থেকে তিনটি ক'রে, মোট ছয়টি দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সমীকরণ লাভ করা যাবে। সমীকরণগুলি সমাধানের উদ্দেশ্যে, (33) এবং (34)-র উভয়পক্ষ যোগ করা হ'ল। আমরা পাই,

$$\cdot M_2\frac{d^2\mathbf{R}_2}{dt^2} = 0. \quad (35)$$

(35)-কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$\frac{d^2}{dt^2}(M_1\mathbf{R}_1 + M_2\mathbf{R}_2) = 0, \quad (36a)$$

$$\frac{d^2\overline{\mathbf{R}}}{dt^2} = 0, \quad (36b)$$

যেখানে বস্তুদ্বয়ের ভরকেন্দ্রের অবস্থিতি ভেক্টর $\bar{\mathbf{R}}$-এর মান হ'ল

$$\bar{\mathbf{R}}=\frac{M_1\mathbf{R}_1+M_2\mathbf{R}_2}{M_1+M_2} \tag{37}$$

(35)-কে একবার সমাকলন ক'রে পাওয়া যায়

$$M_1\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}+M_2\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}=0. \tag{38}$$

এখান থেকে দেখা যায় বস্তুদ্বয়ের রৈখিক ভরবেগের যোগফলের মান শূন্য (বহিঃস্থ কোন বল ক্রিয়া করছে না)। (38) হ'ল বস্তুদ্বয়ের রৈখিক ভরবেগ-সংরক্ষণের সমীকরণ।

(36b) থেকে আমরা দেখতে পাই, ভরকেন্দ্রের কোন ত্বরণ নেই—অর্থাৎ বস্তুদ্বয়ের ভরকেন্দ্র সুষম বেগে গতিশীল। উপযুক্ত জড়ত্বীয় নির্দেশ-কাঠামো নির্বাচন ক'রে এই মান শূন্য ধরা যেতে পারে।

(33)-এর উভয়পক্ষকে M_2 দ্বারা ভাগ করলে আসে

$$\frac{d^2\mathbf{R}_2}{dt^2}=-\frac{1}{M_2}\frac{GM_1M_2}{R^2}.\ \hat{\mathbf{R}}, \tag{39a}$$

এবং (34)-এর উভয়পক্ষকে M_1 দ্বারা ভাগ ক'রে পাই

$$\frac{d^2\mathbf{R}_1}{dt^2}=\frac{1}{M_1}\frac{GM_1M_2}{R^2}.\ \hat{\mathbf{R}}. \tag{39b}$$

(39a) থেকে (39b) বিয়োগ ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{d^2}{dt^2}\ (\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)=-\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)\frac{GM_1M_2}{R^2}.\hat{\mathbf{R}} \tag{40}$$

এই সমীকরণটিতে একটি মাত্র ভেক্টর $\mathbf{R}=\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1$ উপস্থিত। যদি সমানীত ভর m-র সংজ্ঞাস্বরূপ

$$\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}=\frac{1}{m}, \tag{41}$$

ধরা হয়, তাহলে (40)-কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়—

$$m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{GM_1M_2}{R^2}.\hat{R}. \tag{42}$$

(42) থেকে দেখা যাচ্ছে প্রারম্ভিক দুই-বস্তু-সমস্যা এখন এক-বস্তু-সমস্যায় রূপান্তরিত হ'ল। একটি মাত্র ভেক্টর **R**-কে সময়ের ফাংশন রূপে নির্ণয় করতে পারলে, কেপলার সমস্যার সমাধান করা যাবে। কেপলার সমস্যার আদি রূপ, (33) এবং (34)-এ কিন্তু দুটি ভেক্টর নির্ণয়ের প্রয়োজন হ'ত।

A বিন্দু সাপেক্ষে B বিন্দুর অবস্থিতি ভেক্টর **R**. কাজেই A বিন্দু-সাপেক্ষে B বিন্দুতে অবস্থিত সমানীত ভর m-বিশিষ্ট কণার গতীয় সমীকরণ হ'ল (42), যেখানে **কণাটির উপর ব্যস্ত-বর্গীয় কেন্দ্রীয় বল ক্রিয়া করছে**। (42)-র ডানদিকে ঋণাত্মক চিহ্ন থেকে বোঝা যায় যে বলটি $\overrightarrow{BA}$ অভিমুখে ক্রিয়া করে, অর্থাৎ বলটি কেন্দ্রাভিমুখী, যেখানে বলকেন্দ্র A. 5·1 অনুচ্ছেদে এই সমস্যাটির আলোচনা করা হয়েছে, যেখানে A বিন্দুকে স্থির ধরা হয়েছে। পার্থক্যের মধ্যে শুধু, এক্ষেত্রে

$$\mu = \frac{GM_1M_2}{m} = \frac{GM_1M_2}{M_1M_2/(M_1+M_2)} = G(M_1+M_2) \tag{43}$$

গ্রহণ করতে হবে। ক্রিয়াশীল বল একটি কেন্দ্রীয় বল হওয়ার জন্য M_1 ভর-সাপেক্ষে M_2 ভরের কক্ষপথ একটি সমতলে সীমাবদ্ধ, এবং বলটি ব্যস্ত-বর্গীয় কেন্দ্রীয় বল হওয়ার জন্য কক্ষপথটি একটি কনিক রূপায়িত করে। আদিবেগ জানা থাকলে (14), (14′) এবং (43) থেকে স্থির করা যাবে কক্ষপথটি পরাবৃত্ত, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত না বৃত্ত হবে।

কক্ষপথটি উপবৃত্ত হলে, M_1 ভরের চারপাশে সম্পূর্ণরূপে একবার ঘুরে আসতে যে সময়ের প্রয়োজন হয়,—অর্থাৎ M_2 ভরের পর্যায়কাল T-র মান (23a) এবং (43) থেকে আসে

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{G(M_1+M_2)}}a^{3/2} \tag{43'}$$

গ্রহের গতি নির্ণয়ে উপরের আলোচনা প্রয়োগ করলে, কেপলারের তৃতীয় নিয়মের কিঞ্চিৎ পরিবর্তন হয়। সূর্যের ভর M দ্বারা এবং কোন একটি গ্রহের ভর M_1 দ্বারা সূচিত করলে, গ্রহটির সূর্য পরিক্রমার পর্যায়কাল হ'ল

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{G(M+M_1)}} a_1^{3/2} \qquad (44)$$

যেখানে a_1 কক্ষপথের উপাক্ষার্ধ। দ্বিতীয় একটি গ্রহের ভর M_2 এবং পর্যায়কাল T_2 হলে

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{G(M+M_2)}} a_2^{3/2}. \qquad (45)$$

(44) এবং (45)-র উভয়পক্ষ বর্গ ক'রে, এবং ভাগ ক'রে পাওয়া যায়

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{M+M_2}{M+M_1} \cdot \frac{a_1^3}{a_2^3} \qquad (46)$$

এখানে $M_1 << M$ ও $M_2 << M$ ধরলে কেপলারের তৃতীয় নিয়ম—অর্থাৎ

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \qquad (47)$$

আসে। খুব সূক্ষ্ম হিসাব করার প্রয়োজন হলে (43′) বা (46) গ্রহণ করতে হবে। তবে, মনে রাখতে হবে (43′) সমীকরণে আলোচ্য গ্রহটির উপর অন্য গ্রহের ক্রিয়া হিসাবের মধ্যে ধরা হয় নি।

লক্ষ্য করার বিষয়, যে কেপলারের প্রথম ও তৃতীয় নিয়ম ব্যস্ত-বর্গীয় কেন্দ্রীয় বলের জন্য সত্য। দ্বিতীয় নিয়মটি কিন্তু যে কোন কেন্দ্রীয় বলের জন্য সত্য। আরও লক্ষ্য করার বিষয়, যে 'বোর' পরমাণুতে ইলেকট্রনের কক্ষপথের ক্ষেত্রে কেপলারের তৃতীয় নিয়ম সম্পূর্ণ সঠিক, কারণ সেক্ষেত্রে সমানীত ভর এবং ধ্রুবক μ-র মান একটি পরমাণুর সকল কক্ষপথের জন্য অভিন্ন।

কয়েকটি গ্রহের কক্ষপথ সংক্রান্ত তথ্য নিম্নের তালিকায় প্রদত্ত হ'ল। পৃথিবীর কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা অতিশয় ক্ষুদ্র হওয়ার ফলে, কক্ষপথ প্রায় একটি বৃত্ত। সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্বের চরম ও অবম মানের গড়কে দূরত্বের **জ্যোতির্বিজ্ঞানীয় একক A.U.** (Astronomical Unit) বলা হয়।

$$1 A.U. = 1{\cdot}495 \times 10^{13}\ cm. \qquad (48)$$

পৃথিবীর কক্ষপথ যে সমতলে সীমাবদ্ধ সেই সমতলকে **ক্রান্তি-বৃত্তভল** বলে।

অন্যান্য গ্রহগুলি ক্রান্তি-বৃত্ততলের সঙ্গে যে কোণ করে, তা নিম্নের তালিকাতে "নতি" নামে দেখানো হয়েছে।

গ্রহ	অর্ধউপাক্ষ A.U.	পর্যায়কাল Sec.	উৎকেন্দ্রতা	নতি, ডিগ্রী, মিনিট	ভর gm.
বুধ	·387	$7·60 \times 10^{6}$	·205	7°00′	$3·28 \times 10^{26}$
পৃথিবী	1·000	$3·16 \times 10^{7}$	·016	–	$5·98 \times 10^{27}$
মঙ্গল	1·523	$5·94 \times 10^{7}$	·093	1°51′	$6·37 \times 10^{26}$
বৃহস্পতি	5·202	$3·74 \times 10^{8}$	·048	1°18′	$1·90 \times 10^{30}$
প্লুটো	39·60	$7·82 \times 10^{9}$	·246	17°7′	$5·4 \times 10^{27}$

তালিকা—সৌরমণ্ডলে কয়েকটি গ্রহের কক্ষপথ-সংক্রান্ত তথ্য।

উদাহরণ—বুধ এবং মঙ্গল গ্রহদ্বয়ের ক্ষেত্রে কেপলারের তৃতীয় নিয়ম (47)-র সত্যতা হিসাব ক'রে দেখা হচ্ছে। এক্ষেত্রে

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(7·60 \times 10^6)^2}{(5·94 \times 10^7)^2} = ·0164,$$ আসন্ন তৃতীয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত।

আর, $$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{(·387)^3}{(1·523)^3} = ·0164,$$ আসন্ন তৃতীয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত।

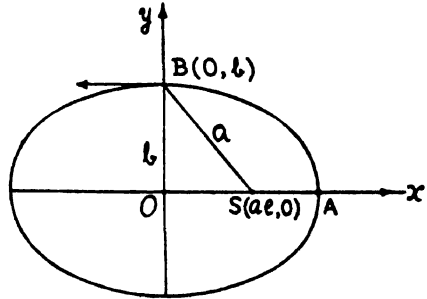
অতএব, আসন্ন তৃতীয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত কেপলারের তৃতীয় নিয়ম এক্ষেত্রে সঠিক।

আবার, বুধ এবং বৃহস্পতির ক্ষেত্রে নিম্নরূপ মান পাওয়া যায়—

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(7·60 \times 10^6)^2}{(3·74 \times 10^8)^2} = ·000413,$$ আসন্ন তৃতীয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত। আর,

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{(·387)^3}{(5·202)^3} = ·000412,$$ আসন্ন তৃতীয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত।

এক্ষেত্রে তৃতীয় সার্থক অঙ্কে কিঞ্চিৎ পার্থক্য পরিলক্ষিত হচ্ছে। লক্ষ্য করার বিষয়, যে গ্রহদ্বয়ের ভরের পার্থক্য এখানে অবজ্ঞেয় নয়, এবং (46) সঠিক ফল দেবে।

উদাহরণ 1. উপবৃত্তীয় কক্ষপথে একটি গ্রহ সূর্য পরিক্রমা করছে। গ্রহটি কক্ষপথের উপাক্ষের একপ্রান্তে এসে পৌঁছালে যদি অকস্মাৎ তার বেগের পরিমাণ বেড়ে দেড়গুণ হয়, এবং দিশা অপরিবর্তিত থাকে তবে, পরিবর্তিত কক্ষপথ কি এবং তার উৎকেন্দ্রতা কত, নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক, উপবৃত্তীয় কক্ষপথের পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে $2a$ ও $2b$. S একটি নাভিবিন্দু এবং A ও B বিন্দুদ্বয় পরাক্ষ ও উপাক্ষের প্রান্তবিন্দু। তাহলে, দূরত্ব $SB=\sqrt{a^2e^2+b^2}=\sqrt{a^2e^2+a^2(1-e^2)}=a.$ ধরা যাক, B বিন্দুতে কণাটির বেগ V. আকস্মিক বেগ বৃদ্ধির পর পরিবর্তিত বেগ V' ধরলে, $V'=\frac{3}{2}V$. পরিবর্তিত রাশিগুলিকে মাথায় ড্যাশ চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হবে। এখন, (13) থেকে আমরা দেখি নাভিবিন্দু থেকে r_0-দূরত্বে বেগ V-র জন্য

$$V^2=2\frac{\mu}{r_0}+\frac{\mu^2}{\mu l}(e^2-1)=2\frac{\mu}{r_0}+\frac{\mu(e^2-1)}{a(1-e^2)}$$

অর্থাৎ $$V^2=\mu\left(\frac{2}{r_0}-\frac{1}{a}\right) \quad \text{(i)}$$

এই সমীকরণটি উপবৃত্তীয় কক্ষপথের জন্য সত্য। এক্ষেত্রে $r_0=a$. সুতরাং,

$$V^2=\mu\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\mu}{a}.$$

পরিবর্তিত বেগের বর্গ $V'^2=\frac{9}{4}V^2=\frac{9\mu}{4a}>2\frac{\mu}{a}.$ (ii)

কাজেই পরিবর্তিত কক্ষপথ একটি পরাবৃত্ত। পরিবর্তিত কক্ষপথের অর্ধপরাক্ষ a' হলে, নাভিবিন্দু থেকে a দূরত্বে বেগ হবে

$$V'^2=\mu\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{a'}\right)$$

(ii)-র সঙ্গে তুলনা ক'রে, আমরা পাই $a'=4a$. পরিবর্তিত অর্ধনাভিলম্ব

$$l'=a'(e'^2-1)=4a(e'^2-1).$$

পরিবর্তিত কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক h'-র জন্য আমরা পাই

$$h'^2=\mu l'=4\mu a(e'^2-1) \qquad \text{(iii)}$$

বলকেন্দ্র থেকে গতির দিশার লম্বদূরত্ব কিন্তু প্রদত্ত সর্তানুসারে অপরিবর্তিত থাকে। কাজেই

$$h'=V'.b=\frac{3}{2}Va\sqrt{1-e^2}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cdot a\sqrt{1-e^2}. \qquad \text{(iv)}$$

(iii) ও (iv) থেকে h' অপনয়ন করলে আসে

$$4\mu a(e'^2-1)=\frac{9}{4}\mu a(1-e^2).$$

সুতরাং পরিবর্তিত উৎকেন্দ্রতা

$$e'=\sqrt{25-9e^2}/4.$$

উদা. 2. উপবৃত্তীয় কক্ষপথে সূর্য পরিক্রমণকালে একটি গ্রহ যখন উপাক্ষের এক প্রান্তে এসে পৌঁছায়, তখন যদি মুহূর্তের জন্য গ্রহটিকে থামিয়ে ছেড়ে দেওয়া হয়, তবে দেখাতে হবে যে সূর্যে পতিত হতে গ্রহটির প্রয়োজনীয় সময় হ'ল $\frac{\sqrt{2}}{8}T$, যেখানে T গ্রহটির পর্যায়কাল সূচিত করে।

পূর্বের উদাহরণে প্রদত্ত চিত্রে, সূর্য S নাভিবিন্দুতে অবস্থিত এবং B বিন্দুতে এসে পৌঁছলে, গ্রহটিকে থামিয়ে ছেড়ে দেওয়া হয়েছে ধরা হ'ল। এই অবস্থায় গ্রহটির উপর শুধুমাত্র মহাকর্ষীয় বল ক্রিয়া করছে এবং গ্রহটি BS সরলরেখায় সূর্য অভিমুখে গমন করবে। বর্তমান সমস্যাটির আলোচনায় সূর্যকে স্থির ধরা হবে।

S বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং SB রেখা বরাবর x-অক্ষরেখা গ্রহণ করা হ'ল। গ্রহটি যখন সূর্য থেকে x-দূরত্বে, তখন গ্রহটির উপর $\overrightarrow{\mathrm{BS}}$ দিশায় ক্রিয়াশীল মহাকর্ষীয় বলের পরিমাণ $\mathrm{GM}m/x^2$ যেখানে M ও m যথাক্রমে সূর্যের ও গ্রহের ভর সূচিত করে এবং G মহাকর্ষীয় ধ্রুবক। সুতরাং গ্রহটির গতীয় সমীকরণ হ'ল

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{G}.\frac{m.\mathrm{M}}{x^2}.$$

উভয়পক্ষকে m দ্বারা ভাগ ক'রে, এবং $\frac{d^2x}{dt^2}$-র পরিবর্তে $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$ বসিয়ে, x-সাপেক্ষে সমাকলন ক'রে আমরা পাই

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{\mathrm{GM}}{x}+c_1 \qquad \text{(i)}$$

যেখানে c_1 সমাকলন অচর। B বিন্দুতে গ্রহটির দূরত্ব $\mathrm{SB}=a$, এবং বেগ $v=0$. এই মান (i)-এ বসিয়ে আসে

$$0=\frac{\mathrm{GM}}{a}+c_1 \quad \text{অর্থাৎ,} \quad c_1=-\frac{\mathrm{GM}}{a},$$

c_1-র মান (i)-এ বসিয়ে সরল ক'রে ও বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{dx}{dt}=v=\pm\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{a}}\sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

গ্রহটি বলকেন্দ্রের দিকে আসছে ব'লে এখানে ঋণ চিহ্নটি গ্রহণ করতে হবে। কাজেই,

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{a}}\,dt=-\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$$

গ্রহটি $t=0$ সময়ে B বিন্দুতে, অর্থাৎ $x=a$ বিন্দুতে অবস্থিত ছিল ধ'রে, $x=0$ বিন্দুতে পৌঁছাতে প্রয়োজনীয় সময়ের মান, সমাকলন ক'রে

$$\int_{t=0}^{t}\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{a}}\,dt=-\int_{x=a}^{0}\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx. \qquad \text{(ii)}$$

ডানদিকের সমাকলটির মান $\sqrt{x}=\sqrt{a}\sin\theta$ বসিয়ে সহজেই নির্ণয় করা যায়। প্রকৃতপক্ষে, আমরা দেখি

$$-\int_{x=a}^{0}\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{a}\sin\theta}{\sqrt{a}\cos\theta}\cdot 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$=a\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta)=a\frac{\pi}{2}\cdot$$

(ii) সমীকরণে এই মান বসিয়ে আমরা পাই

$$\sqrt{\frac{2GM}{a}}\,t=a\frac{\pi}{2}.$$

অতএব, নির্ণেয় সময় $t=\dfrac{\pi}{2}\;\dfrac{a^{3/2}}{\sqrt{2GM}}$. (iii)

কিন্তু $(23a)$ থেকে আমরা জানি গ্রহটির পর্যায়কাল

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}.$$

এক্ষেত্রে $\mu=GM$. কাজেই $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2}$ (iv)

(iii) ও (iv)-র উভয়পক্ষ ভাগ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{t}{T}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

অতএব নির্ণেয় সময় $t=\sqrt{2}\,T/8$.

উদা. 3. শুক্রগ্রহের কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা ·006, অর্থাৎ কক্ষপথটি আসন্নভাবে বৃত্তাকার। অকস্মাৎ কোন কারণে, সূর্যের ভর বর্তমান ভরের $(1/n)$-তম অংশে পরিণত হলে, শুক্রগ্রহের পরিবর্তিত কক্ষপথ কি হবে ?

শুক্রগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ a এবং ভর m ও সূর্যের ভর M হলে, বৃত্তাকার কক্ষপথে শুক্রের বেগ V-র জন্য

$$m\frac{V^2}{a}=\text{অভিকেন্দ্র বল}=\frac{GmM}{a^2},$$

যেখানে G মহাকর্ষীয় ধ্রুবক। সুতরাং, সরল ক'রে ও বর্গমূল গ্রহণ ক'রে আসে

$$V=\sqrt{\frac{GM}{a}}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}, \text{ যেখানে } \mu=GM.$$

সূর্যের ভর পরিবর্তিত হয়ে M/n হলে, সূর্য থেকে r-দূরত্বে শুক্রের উপর ক্রিয়াশীল মহাকর্ষীয় বল, হ'ল

$$\frac{GmM}{nr^2}=\frac{\mu}{n}\cdot\frac{M}{r^2}=\frac{\mu' M}{r^2} \text{ যেখানে } \mu'=\frac{\mu}{n}. \quad \text{(i)}$$

পরিবর্তিত গতিতে শুক্রগ্রহ (i)-এ প্রদত্ত কেন্দ্রীয় আকর্ষক বলের ক্রিয়ায় গমনরত থাকবে, এবং এই গতির জন্য আদি বেগ $V=\sqrt{\mu/a}$ ও আদি অবস্থিতি $r=a$. কাজেই (14) অনুযায়ী কক্ষপথ পরাবৃত্ত, অধিবৃত্ত বা উপবৃত্ত হবে, যদি

$$\text{যথাক্রমে } V^2 \gtreqless \frac{2\mu'}{a} \text{ হয়, অর্থাৎ, যথাক্রমে } \frac{\mu}{a} \gtreqless 2\frac{\mu}{na} \text{ হয়।}$$

কাজেই, n-র মান 2-র অধিক হলে নির্ণেয় কক্ষপথ পরাবৃত্ত, 2-র সমান হলে অধিবৃত্ত এবং 2-র ক্ষুদ্রতর হলে উপবৃত্ত হবে।

4. দেখাতে হবে যে উপবৃত্তীয় কক্ষপথে সূর্যকে পরিক্রমণকালে একটি গ্রহের অরীয় বেগ সবচেয়ে বেশি হয় যখন অর কক্ষপথের পরাক্ষের উপর লম্ব. এবং এই বেগের পরিমাণ

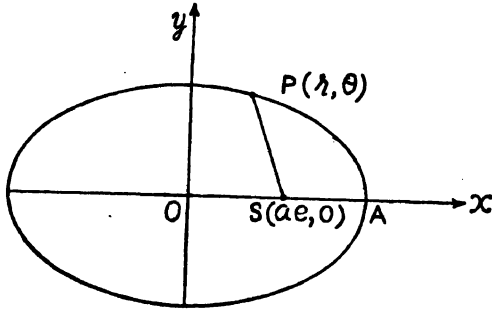
$$\frac{2\pi ae}{T\sqrt{1-e^2}},$$

যেখানে e উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, a অর্ধ-পরাক্ষ এবং T গ্রহটির পর্যায়কাল সূচিত করে।

উপবৃত্তীয় কক্ষপথের নাভিবিন্দু S, সূর্যের অবস্থিতি সূচিত করে। t-সময়ে গ্রহটির অবস্থিতি $P(r,\theta)$. গ্রহটির ভর m এবং সূর্যের ভর M ধ'রে (সূর্য স্থির ধরা হবে) গ্রহটির গতীয় সমীকরণ হ'ল অরীয় দিশায়,

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-G\frac{mM}{r^2},$$

এবং কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণের সমীকরণ

$$r^2\dot{\theta}=h. \tag{i}$$

সমীকরণদ্বয়ের মধ্যে $\dot{\theta}$ অপনয়ন ক'রে ও উভয়পক্ষে m দ্বারা ভাগ ক'রে আমরা পাই

$$\frac{d\dot{r}}{dt}\equiv\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right)\equiv\ddot{r}=\frac{h^2}{r^3}-\frac{GM}{r^2} \tag{ii}$$

কিন্তু, ইতিপূর্বে আমরা দেখেছি $h^2=\mu l$ যেখানে l অর্দ্ধ-নাভিলম্ব সূচিত করে। এক্ষেত্রে $\mu=GM$. কাজেই

$$h^2=GMl.$$

এই মান (ii)-এ বসিয়ে, r-সাপেক্ষে সমাকলন ক'রে আমরা পাই

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2=GM\left(-\frac{l}{2r^2}+\frac{1}{r}\right)+c \tag{iii}$$

যেখানে c সমাকলন অচর। অপদূরক বিন্দু A-তে গ্রহটি অনুপ্রস্থ দিশায় গমন করছে ব'লে,

$$\dot{r}=0,\ r=SA=OA-OS=a(1-e).$$

(iii)-এ এই মান বসিয়ে আমরা পাই

$$0=GM\left\{-\frac{l}{2a^2(1-e)^2}+\frac{1}{a(1-e)}\right\}+c$$

অর্থাৎ

$$c = -\text{GM}\,\frac{2a(1-e)-l}{2a^2(1-e)^2}$$

$$= -\text{GM}\,\frac{2a(1-e)-a(1-e^2)}{2a^2(1-e)^2} = -\frac{\text{GM}}{a}.$$

c-র এই মান (iii)-এ বসিয়ে, সরল ক'রে আসে

$$\dot{r}^2 = \text{GM}\left\{-\frac{l}{r^2}+\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right\} \tag{iv}$$

(ii) থেকে দেখা যায়, $\dot{r}$-র মান চরম বা অবম হবে যখন

$$\frac{h^2}{r^3}-\frac{\text{GM}}{r^2}=0 \text{ অর্থাৎ } r=\frac{h^2}{\text{GM}}=\frac{\text{GM}l}{\text{GM}}=l.$$

কিন্তু অর যখন অর্ধ-নাভিলম্বের সমান হয়, তখন অর পরাক্ষের উপর লম্ব হয়। (iv) সমীকরণে $r=l$ বসিয়ে, এই বেগের বর্গের মান আসে

$$\dot{r}^2\Big]_{r=l} = \text{GM}\left\{-\frac{l}{l^2}+\frac{2}{l}-\frac{1}{a}\right\} = \frac{\text{GM}}{la}(a-l).$$

সুতরাং এই বেগের পরিমাণ

$$\dot{r}\Big]_{r=l} = \sqrt{\text{GM}}\sqrt{\frac{a-l}{al}} = \sqrt{\text{GM}}\sqrt{\frac{a.e^2}{al}}$$

$$= e\sqrt{\frac{\text{GM}}{a(1-e^2)}}. \tag{v}$$

আবার, গ্রহটির পর্যায়কাল $\text{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{GM}}}a^{3/2}$. কাজেই,

$$\sqrt{\text{G.M}} = \frac{2\pi}{\text{T}}a^{3/2}.$$

এই মান (v)-এ বসিয়ে, $r=l$ বিন্দুতে বেগের পরিমাণ দাঁড়ায়

$$\dot{r}\Big]_{r=l} = \frac{2\pi ae}{\text{T}\sqrt{1-e^2}} \tag{vi}$$

কিন্তু অপদূরক বিন্দুতে $\dot{r}$-র মান শূন্য হয়। কাজেই (vi) সমীকরণে প্রদত্ত মান, বেগ $\dot{r}$-র নির্ণেয় চরম মান।

প্রশ্নমালা 5

1. একটি কণা সমতলে একটি উপবৃত্ত রচনা করছে। ক্রিয়াশীল বল উপবৃত্তটির একটি নাভিবিন্দু অভিমুখে ব্যস্ত-বর্গীয় ও আকর্ষক। বলকেন্দ্র থেকে r_0-দূরত্বে বেগ v_0 হলে, কণাটির পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

2. ব্যস্ত-বর্গীয় আকর্ষক বলের ক্রিয়ায় একটি কণা, $\frac{1}{2}$ উৎকেন্দ্রতা-বিশিষ্ট একটি অধিবৃত্ত রচনা করছে। কণাটি যখন উপাক্ষের এক প্রান্তে, তখন দিশা অপরিবর্তিত রেখে কণাটির বেগ হঠাৎ দ্বিগুণ করা হ'ল। নতুন কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

3. একটি কৃত্রিম উপগ্রহ উপবৃত্তীয় কক্ষপথে পৃথিবীকে পরিক্রমা ক'রে চলেছে। ভূকেন্দ্র থেকে উপগ্রহটির চরম ও অবম দূরত্ব যথাক্রমে $4a$ ও $2a$, যেখানে a পৃথিবীর ব্যাসার্দ্ধ সূচিত করে। দেখাও যে উপগ্রহটির পর্যায়কাল

$$2\pi\sqrt{27a/g}$$

4. দেখাও যে পৃথিবীর সূর্য পরিক্রমার বেগ বাড়িয়ে বর্তমান বেগের দেড়গুণের মতো করলেই, পৃথিবী সৌরমণ্ডল থেকে পলায়ন করবে।

5. দেখাও যে নাভিবিন্দুতে বলকেন্দ্র-বিশিষ্ট উপবৃত্তীয় কক্ষপথে কোন ব্যাসের দুই প্রান্তের বেগের জ্যামিতিক গড় একটি ধ্রুবক এবং গড়দূরত্বে বেগের মানের সমান।

6. প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে আকর্ষক বল λ/r^5 হলে, কক্ষপথ বৃত্ত $r=a$ হওয়ার বেগ নির্ণয় কর।

7. প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে λ/r^2 আকর্ষক বলের ক্রিয়ায় একটি কণা a-ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার কক্ষপথ রচনা করছে। অনুপ্রস্থ বেগ অপরিবর্তিত রেখে কণাটির অরীয় বেগ অকস্মাৎ $\sqrt{\dfrac{\lambda}{5a}}$ পরিমাণ বাড়ানো হ'ল। দেখাও যে কণাটি একটি উপবৃত্ত রচনা করবে এবং নতুন পর্যায়কাল হবে

$$\frac{5}{4}\sqrt{\frac{5}{\lambda}}\,\pi a^{3/2}.$$

8. পৃথিবীর বর্তমান কক্ষপথ বৃত্তাকার ধ'রে, সূর্যের ভর অকস্মাৎ বর্তমান ভরের $(1/n)$-তম হলে, পৃথিবীর পরিবর্তিত কক্ষপথ নির্ণয় কর।

9. একটি গ্রহের কক্ষপথ আসন্নভাবে বৃত্তাকার। গ্রহটিকে যদি অকস্মাৎ মুহূর্তের জন্য থামিয়ে ছেড়ে দেওয়া হয়, তবে দেখাও যে সূর্যে পতিত হতে গ্রহটির যে সময় লাগবে তা গ্রহটির পর্যায়কালের $\sqrt{2}/8$ গুণ।

10. সূর্য থেকে মঙ্গলগ্রহের গড় দূরত্ব, সূর্য থেকে পৃথিবীর গড় দূরত্বের 1·524 গুণ হলে, মঙ্গলগ্রহের পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

11. দেখাও যে, নাভিবিন্দুতে বলকেন্দ্র-বিশিষ্ট উপবৃত্তীয় কক্ষপথে বেগ দুটি ধ্রুবক উপাংশের লব্ধি, একটি μ/h পরিমাণ অনুপ্রস্থ দিশায় এবং অপরটি $\mu e/h$ পরিমাণ পরাক্ষের লম্ব দিশায়।

12. প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষক বল λ/r^2. কণাটিকে r_0 দূরত্বে v_0 বেগে নিক্ষেপ করা হলে দেখাও যে কক্ষপথ একটি সমকোণী পরাবৃত্ত হবে, যদি আদি নিক্ষেপ কোণ

$$\sin^{-1}\frac{\lambda}{v_0 r_0\left(v_0{}^2-2\lambda\right)^{1/2}}$$

হয়।

13. প্রতি একক ভরের জন্য বলকেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষক বল λ/r^2. কণাটির কক্ষপথ $4a$ নাভিলম্ব-বিশিষ্ট একটি অধিবৃত্ত এবং নাভিবিন্দু বলকেন্দ্র। দেখাও যে শীর্ষবিন্দু থেকে নাভিলম্বের একপ্রান্ত পর্যন্ত পৌঁছতে কণাটির সময় লাগবে

$$\frac{4}{3}\left(\frac{2a^3}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

14. একটি কণা $2l$ নাভিলম্ব-বিশিষ্ট একটি অধিবৃত্ত কক্ষপথ রচনা করছে। বলকেন্দ্রটি নাভিবিন্দুতে অবস্থিত। কণাটি যখন নাভিলম্বের একপ্রান্তে এসে পৌঁছেছে, তখন অকস্মাৎ তার বেগ অর্ধেক করা হ'ল। দেখাও যে অতঃপর কণাটি একটি উপবৃত্ত রচনা করবে, যার পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $4l/3$. উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা কত?

15. সূর্য পরিক্রমার পথে পৃথিবী যখন কক্ষপথের উপাক্ষের একপ্রান্তে আসে, তখন m' ভর বিশিষ্ট একটি ক্ষুদ্র উল্কা সূর্যে পতিত হয়। সূর্যের ভর m হলে দেখাও যে এর ফলে পৃথিবীর কক্ষপথের পরাক্ষ $2am'/m$

পরিমাণ এবং পর্যায়কাল এক বছরের $2m'/m$ পরিমাণ ক্ষুদ্রতর হয়, যেখানে কক্ষপথের অর্ধ-পরাক্ষ a.

16. ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত কোন ক্ষেপণাস্ত্র-ঘাঁটি থেকে একটি ক্ষেপণাস্ত্র $\sqrt{2gb}$ বেগে নিক্ষেপ করা হ'ল। ভূপৃষ্ঠে মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণের মান g এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a, এবং বেগটি এমন যে $b<a$. ভূকেন্দ্র থেকে r দূরত্বে প্রতি একক ভরের জন্য ক্ষেপণাস্ত্রটির উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষক বল ga^2/r^2. দেখাও যে ক্ষেপণাস্ত্রটির কক্ষপথ একটি উপবৃত্ত, এবং r-দূরত্বে বেগ v-র মান

$$v^2=2g\left(b-a+\frac{a^2}{r}\right).$$

উত্তরমালা 5

1. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\dfrac{2}{r_0}-\dfrac{v_0^2}{\mu}\right)^{-3/2}$.

2. $\sqrt{7}$.

6. $v=\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a^2}$.

14. $\sqrt{\dfrac{5}{8}}$.

ব্যবহৃত পরিভাষা ঃ ইংরাজী-বাংলা

Absolute পরম
—, motion পরমগতি
—, time পরম সময়
Amplitude বিস্তার
Angular কৌণিক
—, momentum কৌণিক ভরবেগ
Aphelion অপসূর
Apse অপদূরক
Apsidal angle আপদূরক কোণ
Associative law সংযোগ নিয়ম
Auxiliary সহায়ক
—, equation সহায়ক সমীকরণ
Axis অক্ষ
—, major পরাক্ষ
—, minor উপাক্ষ

Balance তুলা
Beat স্বরকম্প
Binomial theorem দ্বিপদ উপপাদ্য

Cardioide হৃদ্‌বক্র
Central কেন্দ্রীয়
Centre কেন্দ্র
—, of curvature বক্রতা-কেন্দ্র
Chain rule শৃঙ্খল নিয়ম
Charge আধান
Charged আহিত
Circular frequency বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক
Collision সঙ্ঘর্ষ
Commutative law বিনিময় নিয়ম
Complementary function সম্পূরক ফাংশন
Compressive force সংকোচনকারী বল
Component উপাংশ
—, radial অরীয় উপাংশ
—, transverse অনুপ্রস্থ উপাংশ
Constrained motion সবাধ গতি
Conservative সংরক্ষী
Consecutive আনুক্রমিক
Condition সর্ত
Constant ধ্রুবক, অচর
—, of proportionality সমানুপাত-জনিত অচর
—, of integration সমাকলন-জনিত অচর বা সমাকলন অচর
Co-ordinate স্থানাঙ্ক
—, system অক্ষতন্ত্র
Correction term শুদ্ধিপদ
Cross-section প্রস্থচ্ছেদ
Cube ঘন
Cycloid চক্রজ

Damping অবমন্দন
—, low স্বল্প অবমন্দন
—, large বৃহৎ অবমন্দন
Damped অবমন্দিত
Definition সংজ্ঞা
Determinant ডিটারমিনান্ট
Dependent নির্ভরশীল
—, linearly রৈখিকভাবে নির্ভরশীল
Derived অবকলিত
—, unit অবকলিত একক
Differential অবকল
—, calculus অবকলন গণিত
—, exact সম্পূর্ণ অবকল
Directrix নিয়ামক
Dimension মাত্রা
Direction দিশা
—, and sense দিশা ও অভিমুখ
—, cosines দিক কোসাইন
Domain এলাকা
Dynamics গতিবিদ্যা

Eccentricity উৎকেন্দ্রতা
Ecliptic, plane of ক্রান্তিবৃত্ততল
Elastic স্থিতিস্থাপক
Ellipse উপবৃত্ত
Elliptic function উপবৃত্তীয় ফাংশন
—, integral উপবৃত্তীয় সমাকল
Elasticity স্থিতিস্থাপকতা
—, modulus of স্থিতিস্থাপক-গুণাংক
Electro-magnetic theory তড়িৎ-চুম্বকীয় তত্ত্ব
Energy শক্তি
—, kinetic গতীয়-শক্তি
—, potential স্থৈতিক শক্তি
—, internal excitation আভ্যন্তরীণ উদ্দীপনা শক্তি
Equation সমীকরণ
—, of motion গতীয় সমীকরণ
—, homogeneous সমসত্ত্ব সমীকরণ
Equiangular spiral সুষমকোণী সর্পিল
Equilibrium সাম্য
—, stable সুস্থিতি
Escape velocity পলায়ন বেগ
Exact সম্পূর্ণ
—, differential সম্পূর্ণ অবকল
Expand প্রসারিত করা
—, in a series শ্রেণীতে প্রসারিত করা
Exponentially এক্স্‌পোনেনসীয় রূপে

Factor গুণক
Field ক্ষেত্র
—, of force বলের ক্ষেত্র
Finite সসীম
—, rotation সসীম ঘূর্ণন
Fixed স্থির
—, stars নিশ্চল তারা
Focus নাভিবিন্দু

Force বল
—, restoring প্রত্যানয়ক বল
—, impressed ক্রিয়াশীল বল
—, central কেন্দ্রীয় বল
—, conservative সংরক্ষী বল
—, compressive সংকোচনকারী বল
—, impulsive ঘাতবল
Forced প্রণোদিত
—, oscillation প্রণোদিত দোলন
Frame কাঠামো
—, of reference নির্দেশ কাঠামো
—, inertial জড়ত্বীয় কাঠামো
Frequency কম্পাঙ্ক
—, circular বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক
Friction ঘর্ষণ
—, coefficient ঘর্ষণাঙ্ক
Function ফাংশন
—, elliptic উপবৃত্তীয় ফাংশন

Generalization সামান্যীকরণ
Gravitation মহাকর্ষ
—, constant of মহাকর্ষীয় ধ্রুবক
Gravity মাধ্যাকর্ষণ
—, acceleration due to মাধ্যাকর্ষণ-জনিত ত্বরণ

Harmonic সমঞ্জস
—, motion সমঞ্জস গতি
—, oscillation সমঞ্জস দোলন

Homogeneous equation সমসত্ত্ব সমীকরণ
Hyperbola পরাবৃত্ত

Identical অভিন্ন
Impulse আবেগ
Impulsive force ঘাতবল
Impressed force ক্রিয়াশীল বল
Independent স্বাধীন
—, linearly রৈখিকভাবে স্বাধীন
Inelastic অস্থিতিস্থাপক
Inertia জড়তা
Inertial frame জড়ত্বীয় কাঠামো
Inertial mass জড়ত্বীয় ভর
Infinitesimal অমিতক্ষুদ্র
Infinity অসীম
—, velocity from অনন্তাগমন বেগ
Initial condition আদি দশা
Integral সমাকল
—, calculus সমাকলন গণিত
—, line রেখা সমাকল
—, path পথ সমাকল
—, indefinite অনিশ্চিত সমাকল
Internal excitation energy অভ্যন্তরীণ উদ্দীপনা শক্তি
Interval of time সময়ান্তর
Inhomogeneous অসমসত্ত্ব
Instantaneous তাৎক্ষণিক
Intrinsic coordinates আন্তর্স্থানাঙ্ক

Intuitive knowledge সজ্ঞাত জ্ঞান
Invariant নিত্য, অব্যয়
Inverse ব্যস্ত
—, square law ব্যস্ত-বর্গ নিয়ম

Kinetics কাইনেটিক্স্, গতিবিদ্যা
Kinematics কাইনেম্যাটিক্স্, সৃতিবিদ্যা
Kinetic গতীয়
—, energy গতীয় শক্তি
—, theory of gases গ্যাসের গতিক তত্ত্ব

Law নিয়ম
—, associative সংযোগ নিয়ম
—, commutative বিনিময় নিয়ম
—, distributive বিচ্ছেদ নিয়ম
Latus rectum নাভিলম্ব
Limiting value সীমান্ত-মান
Line রেখা
—, integral রেখা সমাকল
—, segment of a straight সরল রেখাখণ্ড
Linear রৈখিক
Linearly রৈখিকভাবে
—, dependent রৈখিকভাবে নির্ভরশীল
—, independent রৈখিকভাবে স্বাধীন
Localized vector স্থানস্থিত ভেক্টর

Mass ভর
—, gravitational মহাকর্ষীয় ভর
—, inertial জড়ত্বীয় ভর
—, reduced সমানীত ভর
Major axis পরাক্ষ
Material উপাদান
Maximum চরম
Minimum অবম
Minor axis উপাক্ষ
Mechanics বলবিদ্যা
—, rational যুক্তিসিদ্ধ বলবিদ্যা
Moment ভ্রামক
Motion গতি
—, oscillatory দোলনগতি
—, equation of গতীয় সমীকরণ
—, constrained সবাধ গতি
—, uniform সুষম গতি

Natural প্রাকৃত
Necessary and sufficient condition আবশ্যিক ও যথেষ্ট সর্ত
Neglect অবজ্ঞা
Negligible অবজ্ঞেয়

Operator সংকারক
Ordinate কোটি
Origin মূলবিন্দু
Orthogonal সমকোণীয়
—, Cartesian coordinates সমকোণীয় কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

Oscillation দোলন
Oscillatory motion দোলনগতি

Parabola অধিবৃত্ত
Parameter পরামাত্রা
Particular solution বিশেষ সমাধান
Path integral পথসমাকল
Perfect differential সম্পূর্ণ অবকল
Perihelion অনুসূর
Periodic পর্যাবৃত্ত
—, motion পর্যাবৃত্ত গতি
—, time পর্যায়কাল
Phase কলা
Plane সমতল
—, motion সমতলীয় গতি
—, of ecliptic ক্রান্তি বৃত্ততল
—, vertical উল্লম্ব সমতল
Polar coordinates মেরু স্থানাঙ্ক, ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক
Position vector অবস্থিতি ভেক্টর
Potential energy স্থৈতিক শক্তি
Power ক্ষমতা
Principle নীতি
Propagation velocity সঞ্চার বেগ

Qualitative definition গুণজ্ঞাপক সংজ্ঞা
Quantitative definition পরিমাণ-জ্ঞাপক সংজ্ঞা
Quantity রাশি
—, physical ভৌত রাশি

Radial অরীয়
—, component অরীয় উপাংশ
Radius vector অর
Rational mechanics যুক্তিসিদ্ধ বলবিদ্যা
Range পাল্লা
Rectilinear ঋজুরেখ
Relaxation শ্লথন
Reduced mass সমানীত ভর
Result ফল
Resultant লব্ধি
Represent রূপায়িত করা
Resonance অনুনাদ
Rigid body দৃঢ়বস্তু
Rotating ঘূর্ণমান
Rough অমসৃণ

Segment খণ্ড
—, line রেখাখণ্ড
Sense অভিমুখ
Shape আকৃতি
Signal ইঙ্গিত
Spring স্প্রিং
—, spiral সর্পিল স্প্রিং
—, balance স্প্রিং-তুলা
Space দেশ
Smooth মসৃণ
Standard প্রমাণ, মানক

Steady state নিয়ত দশা
Substitution প্রতিস্থাপন
Sufficient condition যথেষ্ট সর্ত
Superposition principle উপরিপাত নীতি
Symmetry প্রতিসাম্য

Tension টান
Thrust ঘাত
Time সময়, কাল
—, relaxation শ্লথন সময়
Transformation রূপান্তর
Transient ক্ষণস্থায়ী
Torque টর্ক

Undefined অসংজ্ঞাত
Uniform সুষম
Uniquely একমাত্ররূপে

Value মান
Velocity বেগ
—, uniform সুষম বেগ
—, escape পলায়ন বেগ
—, from infinity অনন্তাগমন বেগ
Vertex শীর্ষবিন্দু
Vertical উল্লম্ব

ব্যবহৃত পরিভাষা : বাংলা-ইংরাজী

অক্ষ axis
—, তন্ত্র coordinate system
অচর constant
অধিবৃত্ত parabola
অনন্তাগমন বেগ velocity from infinity
অনিশ্চিত সমাকল indefinite integral
অন্তর interval
অনুপ্রস্থ transverse
অনুসূর perihelion
অপসূর aphelion
অবকল differential
—, গণিত differential calculus
—, সম্পূর্ণ perfect differential
অবকলন differentiation
অবকলিত derived
—, একক derived unit,
অবমন্দন damping
—, বৃহৎ large damping
—, স্বল্প low damping
অবমন্দিত damped
অবস্থিতি ভেক্টর position vector
অবজ্ঞা neglect

অবজ্ঞেয় negligible
অবম minimum
অবাধ গতি free motion
অভিমুখ sense
অভ্যন্তরীণ উদ্দীপনা শক্তি internal excitation energy
অমসৃণ rough
অমিতক্ষুদ্র infinitesimal
অরীয় radial
অসংজ্ঞাত undefined
অস্থিতিস্থাপক inelastic

আদি দশা initial condition
আধান charge
আনুক্রমিক consecutive
আন্তস্থ্ানাঙ্ক intrinsic coordinates
আবেগ impulse
আহিত charged

ইঙ্গিত signal

উপপাদ্য theorem
—, দ্বিপদ Binomial theorem
উপবৃত্ত ellipse
উপবৃত্তীয় ফাংশন elliptic function
উপাক্ষ minor axis
—, সমতল vertical plane
—, রেখা vertical line
উপাদান material, elements
উপরিপাত নীতি superposition principle
উপাংশ component
উল্লম্ব vertical

ঋজুরেখ rectilinear
—, গতি rectilinear motion

একক unit
—, মৌলিক fundamental unit
—, অবকলিত derived unit
একমাত্র unique
এক্স্‌পোনেনসীয় exponential
এলাকা domain

কণা particle
কম্পাঙ্ক frequency
—, বৃত্তীয় circular frequency
কাল time
কাইনেটিক্‌স্‌ kinetics
কাইনেম্যাটিক্‌স্‌ kinematics
কাঠামো frame,
—, নির্দেশ frame of reference
—, জড়ত্বীয় inertial frame
কলা phase
ক্ষণস্থায়ী transient
ক্ষমতা power
ক্ষেত্র field
—, বলের field of force

ক্রান্তি বৃত্ততল plane of ecliptic
কেন্দ্রীয় central
—, বল central force
—, কক্ষপথ central orbit
কোটি ordinate

গতি motion
—, বিদ্যা dynamics
—, ঋজুরেখ rectilinear motion
—, পরম absolute motion
—, সবাধ constrained motion
—, সুষম uniform motion
গতীয় শক্তি kinetic energy
গতীয় সমীকরণ equation of motion
গুণক factor
গুণজ্ঞাপক সংজ্ঞা qualitative definition

ঘন cube
ঘর্ষণ friction
ঘর্ষণাঙ্ক coefficient of friction
ঘাত power (arithmetic expression), thrust
ঘাতবল impulsive force
ঘূর্ণন rotation
ঘূর্ণমান rotating

চঞ্চু cusp
—, চক্রজের cusp of a cycloid

চক্রজ cycloid
চরম maximum
চিহ্ন sign

জড়তা inertia
জড়ত্বীয় inertial
—, কাঠামো inertial frame
—, ভর inertial mass

টর্ক torque
টান tension
টানটান taut

ডিটারমিনান্ট determinant

তড়িৎ-চুম্বকীয় তত্ত্ব electro-magnetic theory
ত্বরণ acceleration
—, অভিকেন্দ্র normal acceleration
—, কেন্দ্রাভিমুখী centipetal acceleration
—, অনুপ্রস্থ transverse acceleration
—, অরীয় radial. acceleration
তারা star
—, নিশ্চল fixed star

দশা conditoin
—, আদি initial condition
দিক-কোসাইন direction cosine

দিশা direction
দৃঢ় বস্তু rigid body
দ্বিপদ উপপাদ্য Binomial theorem
দেশ space
দোলন oscillation
—, মুক্ত free oscillation
—, প্রণোদিত forced oscillation
—, কাল periodic time
—, প্রাকৃত natural oscillation
দ্রুতি speed

ধনাত্মক positive

নাভি focus
—, লম্ব latus rectum
নিত্য invariant
নিত্যতা invariance
নিয়ত-দশা steady state
নিয়ম law
—, মহাকর্ষ law of gravitation
—, বিনিময় commutative law
—, বিচ্ছেদ distributive law
—, সংযোগ associative law
—, ব্যস্ত-বর্গ inverse square law
নিয়ামক directrix
নিশ্চল তারা fixed star

নীতি principle
—, উপরিপাত superposition principle

পথ path
—, সমাকল path integral
পদ term
পর্যাবৃত্ত periodic
পর্যায়কাল periodic time
পরম absolute
—, সময় absolute time
—, গতি absolute motion
পরাক্ষ major axis
পরামাত্রা parameter
পরাবৃত্ত hyperbola
পলায়ন বেগ escape velocity
পরিমাণ magnitude
পরিমাণ-জ্ঞাপক সংজ্ঞা quantitative definition
পাল্লা range
প্রকল্প hypothesis
প্রণোদিত forced
—, দোলন forced oscillation
প্রতিস্থাপন substitution
প্রতিসাম্য symmetry
প্রত্যানয়ক বল restoring force
প্রসারিত করা expand
—, শ্রেণীতে expand in a series
প্রাকৃত natural
—, দোলন natural oscillation

ফাংশন function
—, উপবৃত্তীয় elliptic function
—, সম্পূরক complementary function

বক্রতা curvature
—, কেন্দ্র centre of curvature
—, ব্যাসার্ধ radius of curvature
বল force
—, সংরক্ষী conservative force
—, মহাকর্ষীয় gravitational force
—, সংকোচনকারী compressive force
বলবিদ্যা mechanics
—, যুক্তিসিদ্ধ rational mechanics
বলের ক্ষেত্র field of force
বিচ্ছেদ নিয়ম distributive law
বিনিময় নিয়ম commutative law
বিশেষ সমাধান particular solution
বিস্তার amplitude
বীক্ষণাগার laboratory
বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক circular frequency
বেগ velocity
—, অনন্তাগমন velocity from infinity
—, অরীয় radial velocity
—, অনুপ্রস্থ transverse velocity
ব্যস্ত inverse
—, -বর্গ নিয়ম inverse square law

ভর mass
—, মহাকর্ষীয় gravitational mass
—, জড়ত্বীয় inertial mass
—, সমানীত reduced mass
ভেক্টর vector
ভৌত physical
ভ্রামক moment

মন্দন retardation
মসৃণ smooth
মহাকর্ষ gravitation
মাত্রা dimension
মাধ্যাকর্ষণ gravity
মান value
মানক standard
মুক্ত free
—, দোলন free oscillation
—, পতন free fall
মেরু-স্থানাঙ্ক polar coordinates

যুক্তিসিদ্ধ rational
—, বলবিদ্যা rational mechanics

রাশি quantity
—, ভৌত physical quantity
রূপান্তর transformation
—, গ্যালিলিয় Galilian transformation
—, লোরেণ্ট্স্ Lorentz transformation
—, সমকোণীয় orthogonal transformation
রূপায়িত করা to represent

শক্তি energy
—, স্থৈতিক potential energy
—, গতীয় kinetic energy
—, সংরক্ষণ conservation of energy
—, অভ্যন্তরীণ উদ্দীপনা internal excitation energy
শুদ্ধিপদ correction term
শ্রেণী series
শৃঙ্খল নিয়ম chain rule
শ্লথন-সময় relaxation time
শীর্ষবিন্দু vertex

সবাধ গতি constrained motion
সমতল plane
—, উল্লম্ব vertical plane
—, আনুভূমিক horizontal plane
সমকোণীয় orthogonal
সময় time
সমসত্ত্ব homogeneous
সমাধান solution
—, বিশেষ particular solution
সমাকল integral
—, উপবৃত্তীয় elliptic integral
—, পথ path integral
—, রেখা line integral
সমাকলন integration
সমানুপাত-জনিত অচর constant of proportionality
সমীকরণ equation
—, সহায়ক auxiliary equation
—, অবকল differential equation
—, রৈখিক linear equation
সংঘর্ষ collision
—, স্থিতিস্থাপক elastic collision
সঞ্চার বেগ propagation velocity
সংকারক operator
সংযোগ নিয়ম associative law
সংকোচনকারী বল compressive force
সংরক্ষী conservative
সম্পূরক complementary
সমানীত ভর reduced mass
সর্পিল sprial
—, স্প্রিং spiral spring

—, সুষমকোণী equiangular spiral
সম্পূর্ণ অবকল perfect differential
সজ্ঞাত জ্ঞান intuitive knowledge
সমঞ্জস দোলন harmonic oscillation
সসীম ঘূর্ণন finite rotation
সরল সমঞ্জস গতি simple harmonic motion
স্বরকম্প beat
স্বল্প অবমন্দন low damping
স্বাধীন independent
—, রৈখিকভাবে linearly independent
সৃতিবিদ্যা kinematics
সীমা limit
সীমান্তমান limiting value
সুস্থিতি stable equilibrium
সাম্য equilibrium
স্থানস্থিত ভেক্টর localized vector
স্থিতিস্থাপক elastic
স্থিতিস্থাপকতা গুণাংক modulus of elasticity

হৃদ্বক্র cardioide

নির্ঘণ্ট